

UNA APLICACION DE LOS GRUPOS DE SIMETRIA A LA CONFIRMACION DE PERIODOS Y SUBPERIODOS ESTILISTICOS EN LA CERAMICA DE LA REGION CENTRAL DE PANAMA

por

Víctor S. Albis-González*

y

José A. Valencia-Oviedo**

Resumen

Albis, V. & J. Valencia: Una aplicación de los grupos de simetría a la confirmación de períodos y subperíodos estilísticos en la cerámica de la Región Central de Panamá. Rev. Acad. Colomb. Cienc. 17 (67): 703-714, 1990. ISSN 0370-3908.

Se utilizan los grupos de simetría subyacentes en los diseños de la cerámica de la Región Central de Panamá como herramienta analítica para confirmar o no la validez de las divisiones periódicas de esta decoración, cuya aceptación pocos discuten hoy. Los resultados muestran que el atributo universal de la simetría no sólo confirma estas divisiones estilísticas, sino que también permite verificar la diferenciación de tres subperíodos del V período, propuestos inicialmente sobre la base de otros criterios, poniendo de relieve una vez más la gran sensibilidad del criterio clasificatorio que proveen los grupos de simetría.

Los diseños del matemático, como los del pintor o el poeta, han de ser bellos; las ideas como los colores o las palabras, deben relacionarse de manera armoniosa.

G.H. HARDY

1. Introducción

Para el estudio de la región Central de Panamá (según la división territorial propuesta para el estudio arqueológico del istmo (Cooke 1984; véase el mapa)), se ha convenido dividir su desarrollo hasta

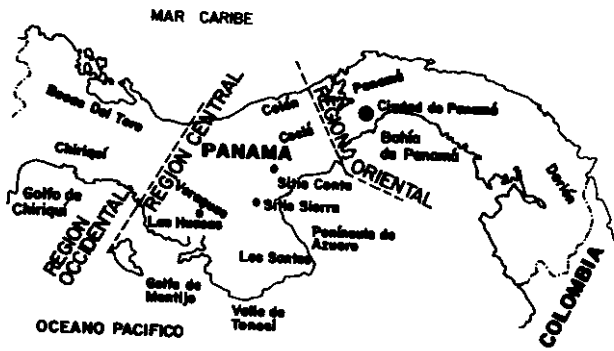
la llegada de los españoles, en varios períodos estilísticos, tal como se muestra en el cuadro 1, que hemos tomado de (Cooke 1985, 36). Por otra parte, hemos observado que el V período, correspondiente al llamado *estilo Conte*, parece admitir una nueva subdivisión en tres subperíodos que hemos denominado *temprano, medio y tardío* (cuadro 2). Su diferenciación se basa en las siguientes razones estilísticas, observadas en platos planos o poco profundos, de base anular:

V período temprano

Ausencia de elementos decorativos adicionales distintos de aquéllos que pueden relacionarse directamente con el motivo dominante del diseño que adorna el plato. El motivo dominante es, en buen número de casos, la vista lateral de una figura zomorfa y los elementos relacionados con él son bandas de motivos trapezoidales. Tal es el caso de las

* Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, D.E.

** Universidad Nacional del Salvador, San Salvador, El Salvador, América Central.



MAPA 1

figuras 54 (33-42-20/1374) y 292a (33-42-20/1385) de (Lothrop 1942) (las cifras entre paréntesis se refieren a la catalogación del *Peabody Museum*), que reproducimos en nuestra figura 1.

V período medio

Los motivos dominantes del diseño están centrados y extendidos por todo el campo disponible. Estos motivos son figuras antropomorfas vistas de frente o mamíferos terrestres vistos lateralmente. Se continúan utilizando elementos trapezoidales adicionales, pero aparecen, sin relación aparente con el motivo central, otros de tipo filiforme, de extremos ligeramente curvos, además de la peculiar voluta en forma de YC del estilo Conte. Ejemplos de estos platos son las figuras 60b (c/13130) y 91a (33-42-20/1295) de (Lothrop, *ib.*) que reproducimos en la figura 2.

V período tardío

Los motivos dominantes son de origen marítimo (peces). Continúa el uso de la voluta en forma de YC de extremos finos y bien terminados, además de otros elementos decorativos adicionales en forma de garras, dispuestos algunas veces en bandas. Las figuras 99b (33-42-20/1106) y 37a (33-42-20/772) de (Lothrop, *ib.*) que reproducimos en la figura 3, son muestras de esta subdivisión.

Nuestro propósito en este trabajo es validar o invalidar la verosimilitud y conveniencia de las anteriores divisiones en períodos estilísticos, utilizando como criterio clasificatorio los grupos de simetría subyacentes en los diseños de la cerámica de la región Central. Con más precisión, verificar si existe o no alguna relación entre las diferencias estilísticas de estos períodos y la "preferencia" por algunos de los posibles grupos de simetría subyacentes en los diseños. Como veremos, sí existe esta relación incluso para los subperíodos que proponemos para el V período. Pero antes, debemos advertir que la difícil cuestión de decidir si la subdivisión propuesta para el V período es cronológica o jerárquica, no encuentra solución en este trabajo.

La utilización de los grupos de simetría como herramienta analítica en arqueología es de reciente data, con interesantes y poderosas implicaciones en la continuidad y cambios estructurales del diseño en el tiempo y el espacio (Zaslow 1977; 1981; Washburn 1977; 1983; Crowe 1981) pues todos aquellos que los utilicen llegarán por fuerza a la misma clasificación partiendo del mismo cuerpo de datos, alcanzándose así un grado de comparabilidad pocas veces logrado con otros instrumentos (Washburn 1979). Por ejemplo, el análisis de los diseños desde esta perspectiva estructural permitió a Zaslow revelar que las estructuras subyacentes en los diseños que consideró en su trabajo (1981) "son el resultado natural de una sucesión lógica de cambio estructural" evitando así "concluir erróneamente que ellas representan la introducción de un nuevo sistema de diseño" (Washburn *ib.*).

Para beneficio de los lectores que no están familiarizados con los grupos discretos de simetría del plano, haremos de ellos, en la sección 2, una breve descripción, remitiendo para mayores detalles a (Zaslow 1977; Alsina & Trillas 1984; Albis & Páramo 1989).

En la sección 3 haremos el análisis estadístico de los datos resultantes de la aplicación de los grupos de simetría a los diseños de la cerámica de la región Central de Panamá. La muestra que hemos utilizado proviene del repertorio gráfico de (Lothrop 1942) e Ichon (1980), de piezas de los museos antropológicos "Reina Torres de Araúz" y Regional de Penonomé, y de la colección particular de diapositivas de Richard G. Cooke, que contiene piezas exhibidas, entre otros lugares, en los museos Regional de Herrera y de la Fundación Heye.

2. Los grupos de simetría de un diseño

La mayoría de los diseños están compuestos por elementos o motivos que se repiten de manera regular. Este es el punto de partida del análisis de las simetrías de un diseño, que siempre supondremos colocado sobre un plano. Los *movimientos* en el plano que permiten repetir sin deformar los elementos o motivos del diseño son los denominados *movimientos rígidos* o *isometrías*, es decir, aquéllos que conservan las distancias entre puntos del plano. Ejemplos de movimientos rígidos son las *reflexiones* con respecto de un eje, las *rotaciones* alrededor de un punto, las *traslaciones paralelas* en la dirección de una recta, y las *reflexiones deslizantes* o *con deslizamiento* (véase la figura 4). Por otra parte, un teorema fundamental (pero de sencilla demostración) y muy conocido (cfr. (Alsina & Trillas 1984, 140)) que dice que *todo movimiento rígido en el plano es la composición de una traslación seguida de una rotación o una reflexión*, nos permite restringir nuestro análisis a las cuatro isometrías mencionadas anteriormente.

Naturalmente, dado el diseño acabado, existe el problema inverso de determinar cuáles fueron los

movimientos rígidos que se utilizaron en su elaboración. Para esto basta determinar todos los movimientos rígidos del plano que transforman el diseño en sí mismo. Se demuestra que este conjunto conforma para la composición de movimientos, un grupo matemático, denominado el grupo de simetría del diseño. Para cada diseño este grupo de simetría es un invariante estructural, y naturalmente diseños muy distintos en lo figurativo, por ejemplo, pueden tener el mismo grupo de simetría. Esto permite una clasificación definiendo dos diseños como equivalentes si tienen el mismo grupo de simetría. Luego, el criterio obtenido de esta manera adquiere verdaderamente un carácter universal.

La estructura del grupo de simetría de un diseño difiere según que en él existan o no traslaciones. En este último caso, el diseño se dice finito y su grupo de simetría es un conjunto finito que sólo

CUADRO 1

Resumen cronológico del desarrollo de la cerámica de la región Central de Panamá

Fecha	Período	Estilo
a. C. 3000	III A	Monagrillo
800	III B & IV	Aristide
100	IV	Tonosí
d. C. 400	Final del IV	Montevideo
500	V	Conte (Coclé temprano)
700/800	VI	Macaracas (Coclé tardío)
1100	VIIA	Parita
1300	VII B	El Hatillo
1520	Llegada de los españoles	

contiene, como elementos, rotaciones (y de entre éstas una de ángulo mínimo) y reflexiones. También se dice que el grupo de simetría de un diseño finito es un grupo puntual o de Leonardo; en este caso, existe lo que se denomina un centro de simetría del diseño, que puede o no pertenecerle. Los únicos grupos puntuales son los llamados grupos diédricos, D_n , y los llamados grupos cíclicos, C_n , $n = 1, 2, \dots$. Los primeros contienen reflexiones cuyos ejes pasan por el centro de simetría del diseño y rotaciones alrededor de este centro. Ejemplos de diseños finitos cuyo grupo de simetría es D_n son los polígonos regulares de n lados, cuando $n \geq 3$. Para $n \geq 3$, el grupo cíclico C_n es exactamente el grupo de simetría de un n -polígono orientado (véase la figura 5), y sus únicos elementos son rotaciones alrededor del centro de simetría del diseño.

Si en el grupo de simetría de un diseño hay por lo menos una traslación, decimos que el diseño es infinito. Al contener una traslación, el grupo de simetría de un diseño infinito es siempre un conjunto infinito. Si el grupo de simetría de un diseño infinito admite traslaciones en una sola dirección, decimos que el diseño es unidimensional, mientras que si las admite en dos direcciones diferentes hablaremos de diseños bidimensionales. En principio los diseños infinitos no son limitados, es decir, se suponen extendidos a todo el plano.

Los diseños unidimensionales que vamos a considerar aquí son los denominados discretos o

CUADRO 2

Subdivisión del V período, según nuestra propuesta

Período	Subperíodo	Estilo
V	Temprano	Conte temprano
	Medio	Conte medio
	Tardío	Conte tardío



FIGURA 1



FIGURA 2

frisos, cuyo común denominador es la repetición de un determinado motivo decorativo a lo largo de una banda rectangular de longitud infinita. La repetición de este motivo implica la existencia de una traslación mínima. La *periodicidad* sistemática en la repetición del motivo constituye "la base del ritmo que el friso comunica". Evidentemente la selección del motivo queda a voluntad del diseñador del friso (a menos que existan normas rituales o de otra índole que limiten la selección). Pero la elección de las simetrías (es decir, de los movimientos rígidos posibles) está limitada por la geometría. A este respecto cabe anotar que en las culturas prehistóricas que hasta ahora hemos examinado, tomadas en conjunto, los diseñadores han encontrado "experimentalmente" todas las limitaciones geométricas, aunque algunas muestren predilección por el uso de algunas en particular.

Un friso es, pues, una figura contenida en una banda o faja delimitada por dos rectas paralelas (que no tienen por qué formar parte del friso). La recta r equidistante y , por tanto, paralela a estas rectas, se llama el *eje de traslación del friso* (figura 6). Los elementos del grupo de simetría de un friso sólo podrán ser traslaciones a lo largo del eje de traslación r (de las cuales una es mínima), reflexiones de ejes ortogonales a r , rotaciones de 180° (medias vueltas) con centros en puntos que estén sobre r y las combinaciones finitas de los anteriores movimientos; en particular, reflexiones deslizantes a lo largo de r .

Se puede demostrar (Alsina & Trillas 1984) que solamente existen 7 tipos de frisos, que ejemplificamos en la figura 7. Sus grupos de simetría se caracterizan así:

1. Grupo de friso F_1 con sólo traslaciones.
2. Grupo de friso F_2 que contiene a F_1 y giros de 180° , pero ninguna reflexión.
3. Grupo de friso F_1^1 obtenido al ampliar F_1 con la reflexión de eje r y sus combinaciones (pero ninguna reflexión vertical).
4. Grupo de friso F_2^1 obtenido al ampliar F_2 con la reflexión de eje r y sus combinaciones.
5. Grupo de friso F_2^2 obtenido al ampliar F_1 con una reflexión de eje perpendicular a r y sus combinaciones, sin contener la reflexión de eje r .
6. Grupo de friso F_2^2 obtenido al ampliar F_2 con una reflexión de eje perpendicular a r (pero no la reflexión de eje r).
7. Grupo de friso F_3^1 obtenido ampliando F_1 con una reflexión deslizante a lo largo de r .

CUADRO 3

Frecuencia de los grupos de Leonardo o puntuales en los distintos períodos y subperíodos de la secuencia cronológica para la Región Central de Panamá (RCP)

Grupos de Leonardo	Períodos						Total por Grupo	
	III	IV-V	V			VI		VII
			Temprano	Medio	Tardío			
C_1	6	3	16	44	25	31	10	135
D_1	10	1	20	19	25	34	18	127
C_2	1	4	19	15	6	16	7	68
D_2	5	0	19	4	1	4	2	35
C_3	0	0	0	0	0	15	1	16
D_3	1	0	0	0	0	0	1	2
C_4	0	0	8	4	0	1	0	13
D_4	4	2	3	3	0	2	0	14
C_5	0	0	0	1	0	0	1	2
Otros	0	1	0	1	0	1	0	3
Total por período	27	11	85	91	57	104	40	415

CUADRO 4

Frecuencia de los grupos de Leonardo sin atender a los distintos períodos o subperíodos para la cerámica de RCP, incluyendo el porcentaje que cada uno representa en el total de campos registrados

Grupos de Leonardo	Frecuencia	Porcentaje
C ₁	135	32,5
D ₁	127	30,6
C ₂	68	16,4
D ₂	35	8,4
C ₃	16	3,9
D ₃	2	0,5
C ₄	13	3,1
D ₄	14	3,4
C ₅	2	0,5
Otros	3	0,7
Totales	415	100,0

Lo anterior permite fabricar el algoritmo (diagrama de flujo) de la figura 8 para la determinación del grupo de un friso.

En el caso más complejo de los diseños bidimensionales, se puede demostrar que la elección de las simetrías está limitada por 17 posibilidades o grupos admisibles, los llamados *grupos cristalográficos planos*. En la figura 9 presentamos un algoritmo para obtener el grupo correspondiente a un diseño bidimensional arbitrario y en la figura 10 algunos ejemplos de estos diseños. Estos grupos los simbolizaremos de acuerdo con las *International Tables of X-Ray Crystallography* de N. F. M. Henry & K. Lonsdale. Los detalles de la obtención de este algoritmo, que tomamos de (Crowe 1981) se pueden encontrar, por ejemplo, en (Albis & Páramo 1989).

3. Aplicación de los grupos de simetría a la muestra

En esta sección mencionamos los procedimientos que hemos usado para reconocer los grupos de simetría subyacentes en los diseños que aparecen en las piezas examinadas.

En primera instancia y cuando fue posible se examinaron las piezas desde el punto de vista de los grupos puntuales. Este examen estuvo influenciado por la forma de la pieza; por ejemplo, en las piezas globulares o subglobulares cuyos campos de diseño están situados en la parte media, no fue posible encontrar diseños con grupos puntuales de simetría; tampoco fue posible hacerlo en aquellas de morfología tripoide-globular, con diseños en cada sección (Lothrop *ib.*, figs. 153a y b), ni en aquellos platos que contienen diseños marcadamente bidimensionales. A los platos con diseños aparentemente bidi-

mensionales que tenían morfología circular plana o poco profunda, se les asignó el grupo C₁. Cuando el campo estaba situado en el hombro de alguna vasija globular o subglobular, inmediata al cuello, no tuvimos inconveniente en identificar los respectivos grupos puntuales; lo mismo fue posible cuando el diseño, sin ser unidimensional o bidimensional, estaba ubicado en la parte media de la pieza.

Cuando pasamos a los grupos de simetría unidimensionales, ocurrió que algunos diseños clasificados globalmente como correspondientes a grupos puntuales, contenían subdiseños con grupos unidimensionales o bidimensionales, y como tales fueron clasificados. Por ejemplo, el grupo F₁ aparece en las figuras 96 (33-42-20/1389) y 95 (c/11587) de (Lothrop *ib.*) que globalmente se clasificaron en el grupo puntual C₁. Por otra parte, se tuvo mucho cuidado en no hacer intervenir para efectos de la clasificación a los elementos decorativos de relleno; la razón de esta restricción es que la frecuencia de su aparición es tanta que de ser contabilizados crearíamos un desequilibrio en favor de los grupos de simetría que les corresponden. Lo anterior no quiere decir que estos elementos, participantes del diseño total, no puedan ser indicadores de los cambios que ocurren en su construcción como manifestación del sistema cultural. Por consiguiente, cuando se hagan intervenir los motivos del relleno, los datos se recopilarán de manera diferente a la que usamos aquí.

En cuanto a los diseños bidimensionales encontramos, en ciertos platos con pedestal del VII período, que podíamos identificar tres campos decorativos distintos: la parte superior, el pedestal y la parte inferior. Esto hizo que el número de campos identificados excediese al de piezas examinadas.

Una dificultad inicial en el examen de la muestra se encontró en el hecho de que de la mayoría de las piezas sólo disponíamos de registros gráficos,

CUADRO 5

Frecuencia de los grupos de Leonardo o puntuales en los distintos períodos y subperíodos de la secuencia cronológica para RCP, agrupando aquellos de baja frecuencia en la clase Otros, que incluye los grupos de C₃ en adelante. Esta clase Otros es la misma que aparece en los cuadros 6, 9 y 10.

Grupos de Leonardo	Períodos						Totales por grupo	
	IV	IV-V	V			VI		VII
			Temprano	Medio	Tardío			
C ₁	6	3	16	44	25	31	10	135
D ₁	10	1	20	19	25	34	18	127
C ₂	1	4	19	15	6	16	7	68
D ₂	5	0	19	4	1	4	2	35
Otros	0	3	11	9	0	19	3	50
Total por período	27	11	85	91	57	104	40	415

CUADRO 7

Los grupos de Leonardo o puntuales con mayor frecuencia en los distintos períodos y subperíodos de la secuencia cronológica para RCP, agrupados de acuerdo al tipo del grupo, basado en los datos del cuadro 6

Grupos de Leonardo	Períodos							Totales por grupo
	IV	IV-V	V			VI	VII	
			Temprano	Medio	Tardío			
Tipo 1: C ₁ , D ₁	16	4	36	63	50	65	28	262
Tipo 2: C ₂ , D ₂	6	4	38	19	7	20	9	103
Totales por período	22	8	74	82	57	85	37	365

por lo que tuvimos muchas veces que asumir que la parte no registrada en la fotografía o dibujo continuaba en la forma sugerida por la parte visible. Sin embargo, esta dificultad se minimizó, pues pudimos comprobar que, salvo pequeñas variaciones, esto ocurría con las piezas observadas directamente en el museo "Reina Torres de Araúz" de las cuales también poseíamos registro gráfico.

Los resultados obtenidos, condensados en los cuadros 3-20, se sometieron a un análisis estadístico, para poner a prueba la hipótesis de la existencia de diferencias estadísticas significativas en las diferentes clasificaciones de las piezas de cerámica pintada de la región Central de Panamá, cuando se consideran los diferentes períodos estilísticos y los distintos grupos de simetría que poseen los diseños contenidos en las piezas. Los datos colectados se analizaron por separado, según las tres categorías de grupos de simetría —puntuales, unidimensionales y bidimensionales— usando como herramienta estadística básica la prueba χ^2 , que consideramos adecuada para el tipo de datos disponibles, clasificados de acuerdo con dos variables completamente independientes: el *período estilístico* (ubicación temporal de la pieza) y los *grupos de simetría*. En esta forma fue posible ordenar los datos en matrices de c columnas (una por cada período) y r filas, correspondientes a grupos de simetría; es decir, utilizamos tablas de contingencia. El nivel de significación que adoptamos para el análisis de los datos fue de 0,05 (5%) y las tablas que consultamos para comparar los resultados de las pruebas χ^2 y t de Student, son las que aparecen en (Snedecor & Cochran y Rodrigues 1977). También tuvimos en cuenta las observaciones de (Cowgill 1977) para este tipo de análisis en arqueología.

Cuando consideramos sólo grupos puntuales, observamos que en el cuadro 3 existían demasiadas casillas vacías en las filas correspondientes a los grupos distintos de C₁, D₁, C₂ y D₂. Del número total (415) de grupos puntuales identificados en la muestra el 87,9% (365) de los campos decorativos examinados correspondía precisamente a estos grupos de órdenes 1, 2 y 4, independientemente del período o

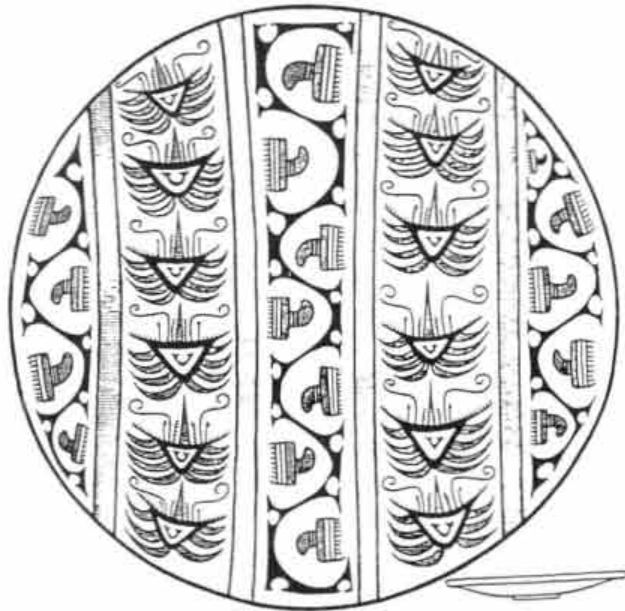


FIGURA 3

CUADRO 6

Frecuencia de los grupos de Leonardo en los distintos períodos y subperíodos de la secuencia cronológica para RCP, agrupados de acuerdo con el tipo del grupo, basado en los datos del cuadro 5

Grupos de Leonardo	Períodos							Totales por grupo
	IV	IV-V	V			VI	VII	
			Temprano	Medio	Tardío			
Tipo 1: C ₁ , D ₁	16	4	36	63	50	65	28	262
Tipo 2: C ₂ , D ₂	6	4	38	19	7	20	9	103
Otros	5	3	11	9	0	19	3	50
Totales por período	27	11	85	91	57	104	40	415

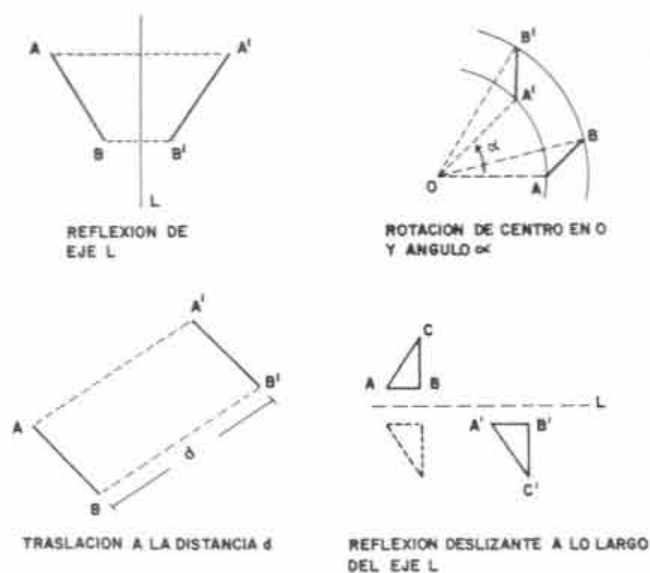


FIGURA 4

subperíodo en consideración, tal como se observa en el cuadro 4. Por esta razón, los diseños correspondientes a los grupos de simetría C_1 , D_1 , C_2 y D_2 se reagruparon en dos tipos: los del tipo 1, C_1 y D_1 , no incluyen a C_2 pero sí a C_1 ; y los del tipo 2 son C_2 y D_2 . Los correspondientes a los grupos puntuales de simetría distintos de los anteriores se reunieron bajo la denominación *otros*. Al aplicarle la prueba χ^2 a los datos del cuadro 5, encontramos $\chi^2 = 82,8836$ (24 g. l.) para un valor de probabilidad de $p < 0,001$, lo que indica, para el nivel de significación escogido, que existe dependencia entre los distintos subgru-

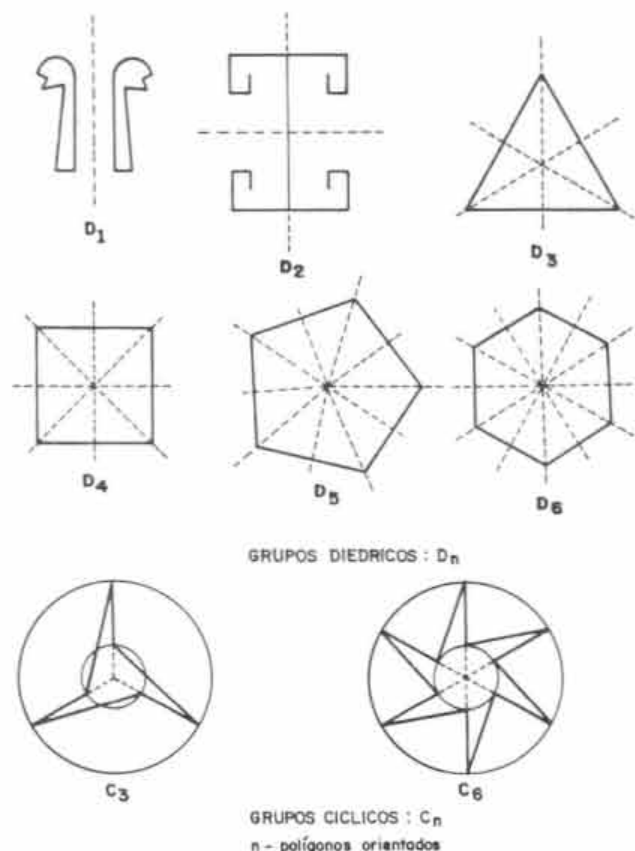


FIGURA 5

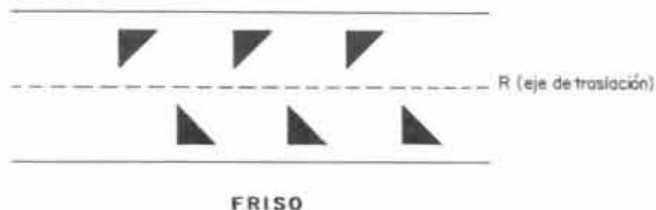


FIGURA 6

pos de simetría puntuales y los diferentes períodos o subperíodos. Tratando de establecer si esta dependencia está realmente relacionada con C_i ($i = 1,2$), aplicamos χ^2 al cuadro 6, obteniendo $\chi^2 = 47,5663$ (12 g. l.), con un valor de probabilidad $p < 0,001$, que indica que aún en este caso existe esta dependencia dentro del nivel de significación escogido. Pero aún más, estas diferencias no están determinadas por la presencia de *otros* (la clase de baja frecuencia), como verificamos al aplicar χ^2 al cuadro 7; $\chi^2 = 30,8121$ (g. l.), para un valor de probabilidad $p < 0,001$.

Teniendo establecido que las diferencias se mantenían, hicimos al cuadro 8 la prueba t de Student, acatando las observaciones de Snedecor & Cochran (1971, Sec. 9.10) relativas al ordenamiento de una variable discreta con el propósito de tratarla como variable continua. En este caso la variable que se ordenó fue "período estilístico", considerando que la diferencia entre dos consecutivos era constante, recurso necesario para aplicar la prueba. El ordenamiento aparece en el cuadro 8, obteniéndose $t = 3,0212$ (363 g. l.), para un valor de probabilidad de $p < 0,005$ (a dos colas), lo que indica que entre las dos clases mayoritarias de grupos de simetría puntuales (los del tipo 1 y los del tipo 2) existe una diferencia significativa.

Lo mismo se hizo por separado con los tres subperíodos propuestos para el V período. Del cua-

CUADRO 8

Presentación de los datos de frecuencia de los grupos de Leonardo agrupados para la aplicación de la prueba t de Student con un ordenamiento que sigue la secuencia cronológica de RCP.

Ordenamiento asignado	Frecuencia	
	Tipo 1: C_1, D_1	Tipo 2: C_2, D_2
3	16	6
2	4	4
1	36	38
0	63	19
- 1	50	7
- 2	65	20
- 3	28	9
Σf	262	103

CUADRO 9

Frecuencias de los grupos de Leonardo para los distintos subperíodos en que se dividió el V Período de la secuencia cronológica de RCP. Basado en los datos del cuadro 5.

Grupos de Leonardo	Subperíodos del V Período			Totales por grupo
	Temprano	Medio	Tardío	
C ₁	16	44	25	85
D ₁	20	19	25	64
C ₂	19	15	6	40
D ₂	19	4	1	24
Otros	11	9	0	20
Totales por subperíodo	85	91	57	233

dro 9, obtuvimos $\chi^2 = 48,0069$ (8 g. l.) y $p < 0,001$, lo que muestra que la clasificación según los grupos de Leonardo depende de los subperíodos. Del cuadro 10, obtuvimos $\chi^2 = 34,0064$ (4 g. l.), lo que enseña que la relación entre los grupos de Leonardo y el tiempo subsiste todavía si sólo consideramos C_i (i = 1, 2). Más aún, sigue persistiendo si suprimimos la clase *otros*, como resulta de aplicar χ^2 al cuadro 11: $\chi^2 = 26,3838$ (2 g. l.), $p < 0,001$.

En el cuadro 12 aparecen los datos de frecuencia de los grupos unidimensionales. Con ellos se realizaron las mismas pruebas estadísticas del caso anterior. Más precisamente, al conjunto total de campos (549) se les aplicó la prueba χ^2 , obteniéndose $\chi^2 = 127,1547$ (36 g. l.) y $p < 0,001$, lo cual indica dependencia entre la clasificación según los grupos unidimensionales y los períodos. Luego, se trató de establecer si esta diferencia estaba asocia-

CUADRO 10

Frecuencia de los Grupos de Leonardo, agrupados de acuerdo con el tipo del grupo, para los distintos subperíodos del V Período de RCP. Basado en los datos del cuadro 6.

Grupos de Leonardo	Subperíodos del V Período			Totales por tipo
	Temprano	Medio	Tardío	
Tipo 1: C ₁ , D ₁	36	63	50	149
Tipo 2: C ₂ , D ₂	38	19	7	64
Otros	11	9	0	20
Totales por subperíodo	85	91	57	233

da con la existencia o no de giros de 180° en los grupos de simetría que aparecen en los diseños bajo estudio. Estos grupos se reagruparon en las clases (F₂, F¹₂, F²₂) y (F₁, F¹₁, F³₁), tal como se muestra en el cuadro 13, a cuyos elementos les aplicamos la prueba χ^2 , obteniendo $\chi^2 = 31,4533$ y $p < 0,001$, evidenciándose así que, a pesar de esta reagrupación, se mantiene la dependencia de la aparición de los grupos unidimensionales con el transcurrir del tiempo. A estos mismos datos se les aplicó en seguida la prueba t de Student para determinar si existía diferencia entre la aparición de grupos unidimensionales que admiten giros de 180° y aquellos que no, utilizando para ello una clasificación ordenada como la ya hecha para los grupos puntuales (cuadro 14). Se obtuvo así $t = 1,438$ (547 g. l.), lo cual indica que no existe diferencia significativa entre las dos clases de reagrupación, pues el valor de probabilidad p está entre 0,1 y 0,2.

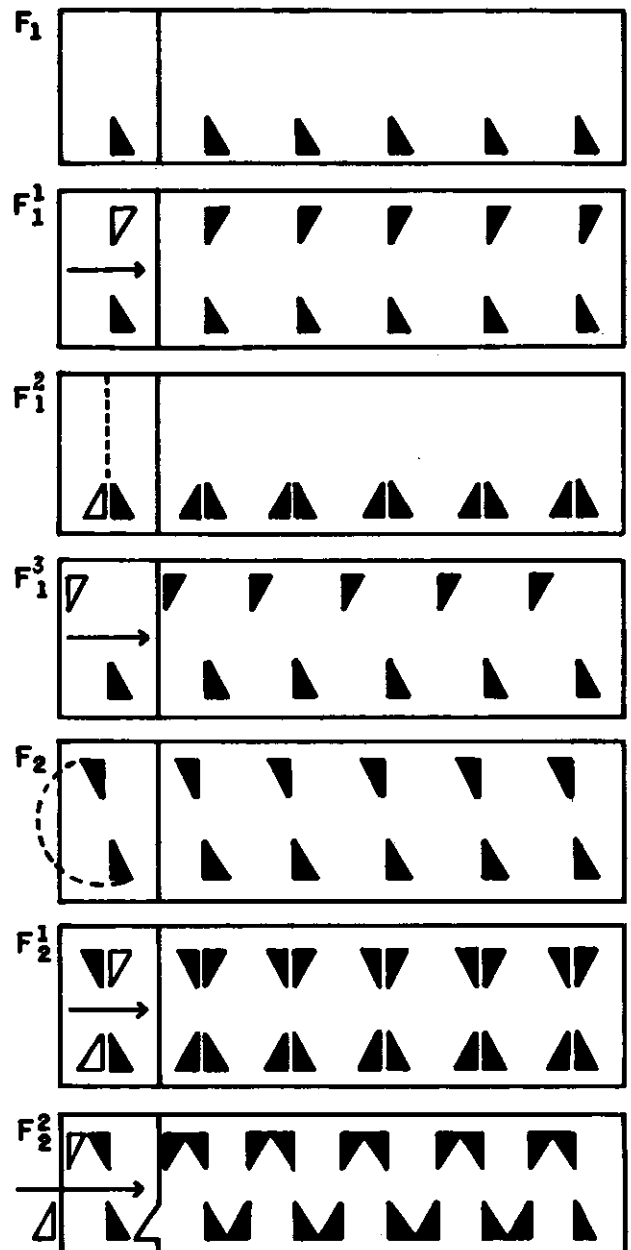


FIGURA 7

CUADRO 11

Los Grupos de Leonardo de mayor frecuencia, agrupados por el tipo del grupo, para los distintos subperíodos del V Período de RCP. Basado en los datos del cuadro 7.

Grupos de Leonardo	Subperíodos del V Período			Totales por tipo
	Temprano	Medio	Tardío	
Tipo 1: C ₁ , D ₁	36	63	50	149
Tipo 2: C ₂ , D ₂	38	19	7	64
Totales por subperíodo	74	82	57	213

CUADRO 12

Frecuencia de los grupos de simetría unidimensionales en los distintos períodos y subperíodos en que se ha dividido RCP.

Grupos unidimensionales	Períodos						Totales por grupo	
	IV	IV-V	V			VI		VII
			Temprano	Medio	Tardío			
F ₁	4	0	19	32	10	40	7	112
F ₁ ¹ ₂	3	2	8	12	6	7	3	41
F ₂ ¹ ₁	17	3	12	32	22	18	10	114
F ₂ ¹ ₂	0	0	6	23	12	25	3	69
F ₂	2	2	5	14	5	23	5	56
F ₂ ¹ ₂	16	1	8	41	8	8	25	107
F ₂ ² ₂	4	3	1	5	5	20	12	50
Totales por período	46	11	59	159	68	141	65	549

También consideramos la alternativa de evaluar solo los datos correspondientes a las subdivisiones del V período (véase el cuadro 15), obteniéndose en primera instancia $\chi^2 = 20,47$ (12 g. l.) para un valor de probabilidad $p = 0,0585$. Este valor nos indica que no existe relación entre la aparición de los grupos unidimensionales y la subdivisión propuesta, pues $p > 0,05$.

Los 58 campos decorativos en los cuales se encontraron grupos de simetría bidimensionales aparecen dispuestos en el cuadro 16, en el que se observan demasiadas casillas vacías. Por esta razón reagrupamos estos datos en clases más amplias, de acuerdo con el menor orden de giro admitido por el grupo de simetría. Las mayores frecuencias se encontraron en los grupos que no admiten rotaciones y en aquellos de rotación mínima de 180° . Los otros grupos se agruparon en la clase *otros*. Antes de continuar debemos anotar que aquí aparecen campos decorativos pertenecientes al III período, lo que no había ocurrido en las dos situaciones examinadas anteriormente. Los datos de esta reagrupación aparecen en el cuadro 17, obteniéndose de él $\chi^2 = 34,8497$ (14 g. l.), $p < 0,005$, de modo que sí existe relación entre la agrupación obtenida para estos grupos de simetría y el tiempo. Como vemos en el cuadro 17, la frecuencia de los datos en los subperíodos del V período es baja y existen en él varias posiciones vacías. Se tomó entonces la decisión de reunirlos como V período solamente (cuadro 18), y para esta nueva disposición obtuvimos $\chi^2 = 30,6932$ (10 g. l.), con $p < 0,001$, lo que indica que aún así persiste la dependencia.

Para tratar de establecer si las diferencias encontradas estaban o no influidas por la presencia

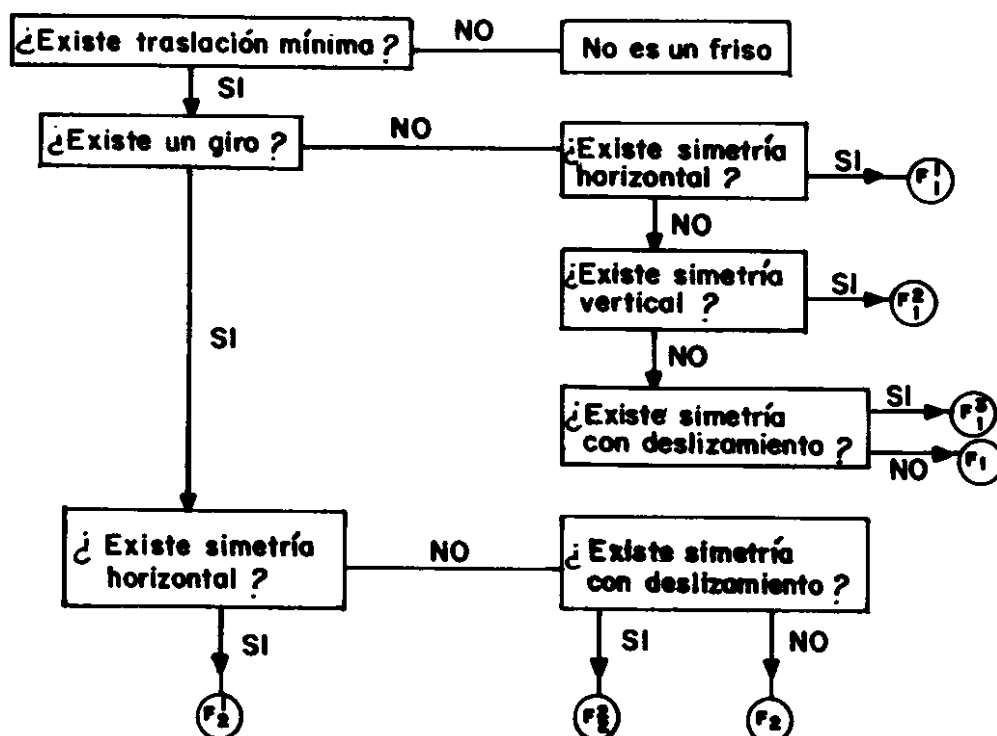


FIGURA 8

de la clase de baja frecuencia *otros* elaboramos el cuadro 19, obteniendo $\chi^2 = 13,1901$ (5 g. l.) y $p < 0,05$. Es decir, nuevamente se mantienen aquéllas. Adicionalmente, realizamos para estos mismos datos la prueba t de Student, usando las disposiciones del cuadro 20, encontrando $t = 11,342$ (56 g. l.), lo que nos muestra que no hay diferencia ($p < 0,05$) entre las dos clasificaciones.

Todo lo anterior enseña que el *atributo universal* de la simetría, no sólo nos ha servido para evidenciar los cambios en el uso de los distintos grupos de simetría a lo largo de los períodos estilísticos de la región Central de Panamá, sino que también este análisis posee mayor sensibilidad que otros, pues nos permitió además verificar la diferenciación que propusimos, sobre la base de otros criterios, para tres subperíodos del V período. Es muy posible entonces que muestras mayores de los otros

CUADRO 13

Frecuencia de los distintos grupos unidimensionales, agrupados de acuerdo con la presencia de una media vuelta como simetría permitida en el grupo para la secuencia cronológica de RCP. Basado en el cuadro 12.

Grupos unidimensionales	Períodos						Totales por clase	
	IV	IV-V	V			VI		VII
			Temprano	Medio	Tardío			
F ₁ y afines	24	5	45	99	50	90	23	236
F ₂ y afines	22	6	14	60	18	51	42	213
Totales por período	46	11	59	159	68	141	65	549

CUADRO 14

Frecuencia de los grupos unidimensionales para el cálculo de la t de Student, con un ordenamiento que sigue la secuencia cronológica de RCP. Basado en los datos del cuadro 13.

Ordenamiento asignado	Frecuencias	
	F ₁ y afines	F ₂ y afines
3	24	22
2	5	6
1	45	14
0	99	60
- 1	50	18
- 2	90	51
- 3	23	42
Σf	336	213

CUADRO 15

Frecuencia de los grupos unidimensionales para los distintos subperíodos del V Período de la secuencia cronológica de RCP. Basado en los datos del cuadro 12.

Grupos unidimensionales	Subperíodos del V Período			Totales por grupo
	Temprano	Medio	Tardío	
F ₁	19	32	10	61
F ₁ ¹	8	12	6	26
F ₂ ¹	12	32	22	66
F ₃ ¹	6	23	12	41
F ₂	5	14	5	24
F ₂ ¹	8	41	8	57
F ₂ ²	1	5	5	11
Totales por subperíodo	59	159	68	286

CUADRO 16

Frecuencia de los grupos bidimensionales en los períodos y subperíodos de RCP.

Grupos bidimensionales	Períodos						Totales por grupo		
	III	IV	IV-V	V				VII	
				Temprano	Medio	Tardío			
p ¹	1	1	0	0	2	1	0	1	6
p ¹ m ¹	0	4	0	2	0	2	0	1	9
p ¹ g ¹	0	0	0	0	0	0	1	0	1
c ¹ m ¹	2	1	4	0	0	0	0	0	5
p ²	0	2	0	0	0	0	0	0	2
p ² mm	2	3	7	0	0	1	5	1	19
p ² mg	0	1	0	0	0	3	12	0	16
p ⁴ mm	1	3	0	0	0	0	1	4	9
Totales	4	15	11	2	2	7	19	7	67

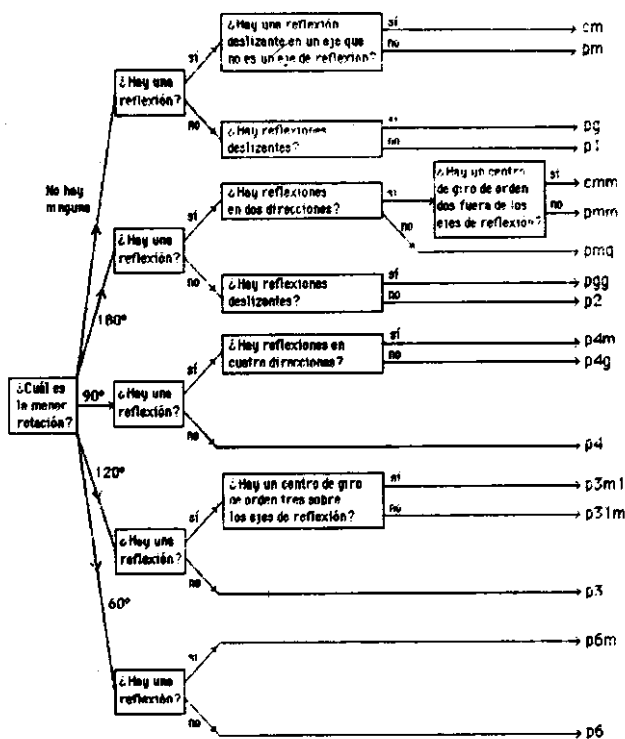


FIGURA 9

CUADRO 19

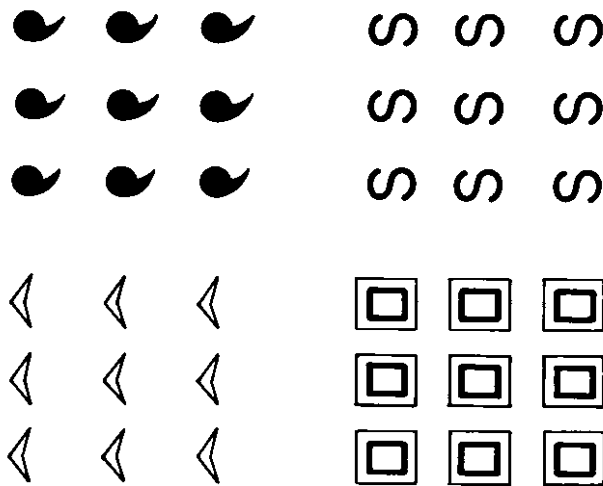
Frecuencia de las dos clases de grupos bidimensionales de mayor frecuencia en la muestra de cerámica de RCP.

Grupos bidimensionales	Períodos						Totales por grupo
	III	IV	IV-V	V	VI	VII	
p ¹ y derivados	1	6	4	7	1	2	21
p ² y derivados	2	6	7	4	17	1	34
Totales por período	3	12	11	11	18	3	58

CUADRO 20

Frecuencia de las clases de grupos bidimensionales de mayor participación en la cerámica de RCP, dispuestas para el cálculo de la t de Student, con un ordenamiento que sigue la secuencia cronológica. Basado en los datos del cuadro 19.

Ordenamiento asignado	Frecuencias	
	p ¹ y derivados	p ² y derivados
3	1	2
2	6	6
1	4	7
0	7	4
- 1	1	17
- 2	2	1



DISEÑOS BIDIMENSIONALES

FIGURA 10

CUADRO 17

Frecuencia de los grupos bidimensionales agrupados por el orden del giro que poseen como una de sus simetrías permitidas, para los distintos períodos (subperíodos) de RCP. Basado en los datos del cuadro 16.

Grupos bidimensionales	Períodos								Totales por grupo
	III	IV	IV-V	V			VI	VII	
				Temprano	Medio	Tardío			
p ¹ y derivados	1	6	4	2	2	2	1	2	21
p ² y derivados	2	6	7	0	0	4	17	1	37
Otros	1	3	0	0	0	0	1	4	9
Totales por período	4	15	11	2	2	7	19	7	67

CUADRO 18

Frecuencia de los grupos bidimensionales en la cerámica de RCP, sin considerar la subdivisión del V Período

Grupos bidimensionales	Períodos						Totales por grupo
	III	IV	IV-V	V	VI	VII	
p ¹ y derivados	1	6	4	7	1	2	21
p ² y derivados	2	6	7	4	17	1	37
Otros	1	3	0	0	1	4	9
Totales por período	4	15	11	11	19	7	67

períodos permitan, con este tipo de análisis, detectar en ellos posibles subdivisiones.

Señalemos que las anteriores no son las únicas maneras de organizar los datos para detectar o corroborar otras correlaciones entre los grupos de simetría y otras características de las piezas. Por ejemplo, es posible con la ayuda de estos grupos determinar los grados de comunicación entre diferentes comunidades o rastrear las rutas de intercambio cultural (Zaslow 1981). Sin embargo, esto requiere mayor precisión sobre la proveniencia y datación de las piezas que se estudien.

Agradecimientos

Los autores quieren agradecer a R.G. Cooke su valiosa orientación y atinado concurso en los aspectos arqueológicos y bibliográficos, y a Augusto Pérez Ordóñez en los de interpreta-

ción estadística. Así mismo, el segundo de los autores quiere expresar su agradecimiento a la Agencia Alemana para el Desarrollo por su apoyo mientras realizaba la correspondiente investigación básica en el Programa de Maestría Centroamericana en Matemáticas, de la Universidad de Panamá.

Bibliografía

1. **Víctor S. Albis & Guillermo Páramo**, 1989. *Matemáticas y antropología* (Edición previa). Bogotá, Universidad Nacional de Colombia.
2. **Claudi Alsina & Enric Trillas**, 1984. *Lecciones de álgebra y geometría*. Barcelona: Editorial Gustavo Gili.
3. **Richard Cooke**, 1984. *Archaeological research in Central and Eastern Panamá: A review of some problems*. In: *Archaeology of Lower Central America*, F. Lange & D. Z. Stone (Eds.). Albuquerque: University of New México Press, 263-302.
4. ———. 1985. *Ancient painted pottery from Central Panama*. *Archaeology* (Jul.-Aug.), 33-39.
5. **George Cowgill**, 1977. *The trouble with significance tests, and what can we do about it*. *American Antiquity* 42 (3), 350-368.
6. **Donald D. Crowe**, 1981. *The Geometry of African Art. III. The smoking pipes of Begho*. In: *The Geometric Vein. The Coxeter Festschrift*. C. Davis D. Brundbaum & F.A. Sherk. (Eds.). New York: Springer-Verlag, 177-189.
7. **Alain Ichon**, 1980. *Archéologie du sud de la Peninsule d'Azuerro*. Études Mésoaméricaines, Série II. México: Mission Archéologique et Ethnologique Française au México.
8. **Samuel K. Lothrop**, 1942. *Coclé, An Archaeological Study of Central Panama. Part II. The Pottery of Sitio Conte and Other Archaeological Sites*. Memoirs of the Peabody Museum, Vol. VII. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
9. **Aroldo Rodríguez**, 1977. *Investigación experimental en psicología y educación*. México: Trillas.
10. **George W. Snedecor & William G. Cochran**, 1971. *Métodos estadísticos*. México: C.E.C.S.A.
11. **Dorothy K. Washburn**, 1977. *A Symmetry Analysis of Upper Gila Area Ceramic Design*. Papers of the Peabody Museum of Archaeology and Ethnology. Cambridge. Mass.: Harvard University Press.
12. ———. 1979. Review of "Pattern Dissemination in the Prehistoric South West and Mesoamerica", Bert Zaslów & Alfred E. Dittert Jr. *American Antiquity* 44 (1), 190-192.
13. ———. 1983. *Toward a Theory of Structural Style in Art*. In: *Structure and Cognition in Art*. D. K. Washburn (Ed.). London: Cambridge University Press.
14. **Bert Zaslów**, 1977. *Pattern Mathematics and Archaeology*. Anthropological Research Papers, No. 2. Tempe, Arizona: Arizona State University.
15. **Bert Zaslów & Alfred E. Dittert Jr.**, 1981. *Pattern Dissemination in the Prehistoric South West and Mesoamerica*. Anthropological Research Papers, No. 25. Tempe, Arizona: Arizona State University.