SOBRE ALGUNOS RESULTADOS DE LA INTEGRACION POR PARTES

Por LUIS DE GREIFF BRAVO

Profesor de la Universidad Nacional

La finalidad de este trabajo es indicar varias fórmulas y procedimientos que llevan de manera expedita a la expresión de diversos tipos de integrales indefinidas, por medio de funciones del integrando. El recurso que será seguido aquí de manera sistemática, es la ***integración por partes, reiterada.***

A la ***integral indefinida,*** le llamaremos a veces con una denominación clásica, a saber, *la primitiva.* Esta locución tiene, a más de otras ventajas, la brevedad. La constante arbitraria que incluye, puede ser omitida en los cálculos, a condición de introducirla finalmente en el resultado.

A menudo, como ocurre en la integración de ecuaciones diferenciales ordinarias, sólo interesa la *parte funcional* de la primitiva. La constante arbitraria no interviene en la llamada integral particular.

Antes de iniciar el análisis haremos una observación importante. En casi todas las fórmulas de que nos ocupamos aquí, figura una función f(x), no especificada. Ahora bien, si se quiere que los cálculos sean rigurosamente aplicables, se debe suponer que las funciones de que se trata, pertenecen a la clase de las *funciones enteras* (polinomios; funciones representables por series absolutamente convergentes en todo el eje real o en todo el plano complejo). Es sabido que las primitivas de dichas funciones, pertenecen a la misma clase.

1. Sea, en primer lugar, el caso siguiente,

$$F(x) = \int f(x)\, e^{ax}\, dx \tag{1}$$

Conviene subrayar la diferencia existente entre la primitiva, $F(x)$, y la *transformada de Laplace* correspondiente a la función $f(x)$. Esta última es una ***integral definida,*** calculada entre los límites 0, ∞; *a,* un parámetro real negativo, o bien, un parámetro complejo sometido a determinadas condiciones. Por el contrario, en este estudio se trata de obtener la primitiva en un sentido *operacional,* es decir, se trata de obtener una función cuya derivada sea igual a la función $f(x)$, dada.

Integrando por partes, se tiene,

$$F(x) = (1/a) \int f(x)\, d.\, e^{ax} = (1/a)\, f(x)\, e^{ax} - (1/a) \int f'(x)\, e^{ax}\, dx \tag{2}$$

Si ahora se aplica esta fórmula a la integral escrita como último término, se tiene,

$$F(x) = (1/a)\, f(x)\, e^{ax} - (1/a)\left[(1/a)\, f'(x) - (1/a) \int f''(x)\, e^{ax}\, dx\right] \tag{3}$$

Efectuando operaciones,

$$F(x) = (1/a)\, f(x)\, e^{ax} - (1/a^2)\, f'(x)\, e^{ax} + (1/a^2) \int f''(x)\, e^{ax}\, dx \tag{4}$$

La generalización es inmediata. Basta escribir,

$$\begin{aligned} F(x) = {} & (1/a)\, f(x)\, e^{ax} - (1/a^2)\, f'(x)\, e^{ax} \\ & + (1/a^3)\, f''(x)\, e^{ax} \\ & - \dots + (-1)^{p-1} (1/a^p)\, f^{(p-1)}(x)\, e^{ax} \\ & + (-1)^p \int f^{(p)}(x)\, e^{ax}\, dx \end{aligned} \tag{5}$$

Si ahora se introduce la designación,

$$E_p(x) = \int f^{(p)}(x)\, e^{ax}\, dx \tag{6}$$

la fórmula (5) puede ser dispuesta de la manera siguiente,

$$\begin{aligned} F(x) = e^{ax} & [(1/a)\, f(x) - (1/a^2)\, f'(x) + (1/a^3)\, f''(x) \\ & - \dots + (-1)^{p-1} (1/a^p)\, f^{(p-1)}(x)] \\ & + (-1)^p (1/a^p)\, E_p(x) \end{aligned} \tag{7}$$

Se obtendrá un resultado con un número limitado de términos, en el caso de ser $f(x)$ un polinomio entero. Entonces, con el fin de aplicar la fórmula (7) será conveniente considerar el grado del polinomio como igual a $(p - 1)$.

Ejemplos.

1º $\quad f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 18x + 11; \quad a = 3; \ (p = 5)$

La aplicación de la fórmula (7), da,

$$\int f(x)\, e^{3x}\, dx = e^{3x}\, [(1/3)\, f(x) - (1/9)\, f'(x) + (1/27)\, f''(x) - (1/81)\, f'''(x) + (1/243)\, f''''(x)]$$

Reemplazando las derivadas por sus valores explícitos y suprimiendo denominadores, se tiene,

$$3^5 \int f(x)\, e^{3x}\, dx = e^{3x}\, [3^4(x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 18x + 11) - 3^2(4x^3 - 9x^2 + 10x - 18) + 3^2(12x^2 - 18x + 10) - 3(24x - 18) + 24]$$

Al reunir términos semejantes se llega al resultado final,

$$\int f(x)\, e^{3x}\, dx = e^{3x}\, [27x^4 - 117x^3 + 252x^2 - 654x + 515]\, /3^4$$

2º) $\quad f(x) = x^3 - 5x + 8; \ a = -1; \ (p = 4)$

Se tiene,

$$\int (x^3 - 5x + 8)\, e^{-x}\, dx = e^{-x}\, [(-1)\, (x^3 - 5x + 8) - (1)\, (3x^2 - 5) + (-1)\, (6x) - (1)\, (6)]$$

y por último, al adicionar términos semejantes,

$$\int (x^3 - 5x + 8)\, e^{-x}\, dx = e^{-x}\, (x^3 + 3x^2 + x + 9)$$

2. Se obtienen resultados muy útiles cuando la constante, *a,* es imaginaria.

Si se escribe, $a = ik$, donde k es un número real, se tiene,

$$\begin{aligned} F(x) & = \int f(x)\, e^{ikx}\, dx \\ & = \int f(x)\, (\cos kx + i \operatorname{sen} kx)\, dx \\ & = \int f(x) \cos kx\, dx + i \int f(x) \operatorname{sen} kx\, dx \end{aligned} \tag{1}$$

Como, por otra parte, se puede aplicar el desarrollo en serie escrito en (7) a la función $F(x)$, resulta, al separar partes reales y partes imaginarias,

$$(2) \quad \int f(x)\, cos\, kx\, dx = [(1/k^2)\, f'(x) - (1/k^4)\, f'''(x) + (1/k^6)\, f^{v}(x) - \ldots]\, cos\, kx + [(1/k)\, f(x) - (1/k^3)\, f''(x) + (1/k^5)\, f''''(x) - \ldots]\, sen\, kx;$$

$$(3) \quad \int f(x)\, sen\, kx\, dx = [-(1/k)\, f(x) + (1/k^3)\, f''(x) - (1/k^5)\, f''''(x) + \ldots]\, cos\, kx + [(1/k^2)\, f'(x) - (1/k^4)\, f'''(x) + (1/k^6)\, f^{v}(x) - \ldots]\, sen\, kx$$

Veamos algunos ejemplos.

1º) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 11 \quad ; k = 3$

$$\int (x^3 - 2x^2 + 5x - 11)\, cos\, 3x\, dx = [(1/9)\,(3x^2 - 6x + 5) - 6/81]\, cos\, 3x + [(1/3)\,(x^3 - 2x^2 + 5x - 11) - 1/27\,(6x - 6)]\, sen\, 3x = (1/27)\,(9x^2 - 18x + 13)\, cos\, 3x + (1/9)\,(3x^3 - 6x^2 + 13x - 31)\, sen\, 3x$$

2º) $$\int x^4\, sen\, 2x\, dx = [(-1/2)\, x^4 + (1/8)\, 12\, x^2 - (1/32)\, 24]\, cos\, 2x + [(1/4)\, 4x^3 - (1/16)\, 24x]\, sen\, 2x = (-1/4)\,(x^4 - 6x^2 + 3)\, cos\, 2x + (1/2)\,(2x^3 - 3x)\, sen\, 2x$$

3. En este aparte presentaremos nuevos desarrollos y fórmulas a los cuales llegaremos por el mismo procedimiento de integración por partes, reiterada. Muchos de los resultados consignados antes aparecerán de nuevo, aunque con la ventaja de una mayor generalidad.

Partimos de la relación,

$$(1) \quad \int f(x)\, dx = x\, f(x) - \int x\, f'(x)\, dx$$

y, de la misma manera,

$$(2) \quad \int x\, f'(x)\, dx = \int f'(x)\, d.\, x^2/2 = (x^2/2)\, f'(x) - (1/2) \int x^2\, f''(x)\, dx$$

Substituyendo este resultado en (1), se tiene,

$$(3) \quad \int f(x)\, dx = x\, f(x) - (x^2/2)\, f'(x) + (1/2) \int x^2\, f''(x)\, dx$$

Una nueva cuadratura, da,

$$(4) \quad \int f(x)\, dx = x\, f(x) - (x^2/2!)\, f'(x) + (x^3/3!)\, f''(x) + (1/3!) \int x^3\, f'''(x)\, dx$$

La siguiente fórmula generaliza los resultados precedentes:

$$(5) \quad \int f(x)\, dx = (x/1!)\, f(x) - (x^2/2!)\, f'(x) + (x^3/3!)\, f''(x) - (x^4/4!)\, f'''(x) + \ldots + (-1)^{p-1}\,(x^p/p!)\, f^{(p-1)}(x) + R_p(x)$$

donde se tiene, como valor del *término residual* $R_p(x)$:

$$(6) \quad R_p(x) = (-1)^p\,(1/p!) \int x^p\, f^{(p)}(x)\, dx$$

La relación (5) permite reducir el cálculo de una primitiva de la forma,

$$(7) \quad \int x^p\, f^{(p)}(x)\, dx$$

al cálculo de otra más simple.

Aplicación. Interesantes resultados son aquellos que provienen de substituir $f(x)$ por la función exponencial. Sea en efecto,

$$(8) \quad f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots = e^x$$

Llevando dichos valores a (5), se tiene,

$$(9) \quad e^x = (x/1!)\, e^x - (x^2/2!)\, e^x + (x^3/3!)\, e^x + \ldots + (-1)^{p-1}\,(x^p/p!)\, e^x + R_p(x)$$

de la cual se deduce,

$$(10) \quad R_p(x) = e^x\,[1 - x/1! + x^2/2! - x^3/3! + \ldots + (-1)^p\, x^p/p!]$$

o, bajo forma explícita, suprimiendo denominadores,

$$(11) \quad \int x^p\, e^x\, dx = (-1)^p\, p!\, e^x\,[1 - x/1! + x^2/2! - x^3/3! + \ldots + (-1)^p\, x^p/p!]$$

Así, para $p = 3$, se tiene,

$$(12) \quad \int x^3\, e^x\, dx = -3!\, e^x\,[1 - x/1! + x^2/2! - x^3/3!]$$

y, para $p = 4$,

$$(13) \quad \int x^4\, e^x\, dx = 4!\, e^x\,[1 - x/1! + x^2/2! - x^3/3! + x^4/4!]$$

Es fácil llegar a la fórmula (11) partiendo de una fórmula de reducción que se aplica sucesivamente hasta obtener una expresión que se puede integrar directamente.

Con tal fin escribimos,

$$(14) \quad J_p = \int x^p\, e^x\, dx$$

Al integrar se tiene,

$$(15) \quad J_p = \int x^p\, d.\, e^x = x^p\, e^x - p \int x^{p-1}\, e^x\, dx$$

resultado que se puede escribir como sigue,

$$(16) \quad J_p = x^p\, e^x - p\, J_{p-1}$$

La misma fórmula, aplicada a J_{p-1}, da,

$$(17) \quad J_{p-1} = x^{p-1}\, e^x - (p-1)\, J_{p-2}$$

resultado que se substituye en (16) para tener,

$$(18) \quad J_p = x^p\, e^x - p x^{p-1}\, e^x + p(p-1)\, J_{p-2}$$

Una nueva substitución dará,

$$(19) \quad J_p = x^p\, e^x - p x^{p-1}\, e^x + p(p-1) x^{p-2}\, e^x - p(p-1)\,(p-2)\, J_{p-3}$$

y así sucesivamente. Este proceso conduce a un término directamente integrable, a saber,

$$(20) \quad J_0 = \int e^x\, dx = e^x$$

con lo cual se obtiene el resultado escrito ya en (11).

Si el análisis precedente se repite con base en la función,

(21) $f(x) = e^{kx}$, de donde, $f^{(p)}(x) = k^p e^{kx}$, se llega

a la relación siguiente,

(22) $\int x^p e^{kx} dx = (-1)^p p! k^{-p-1} e^{kx} [1 - kx/1! + k^2x^2/2! - k^3x^3/3! + \ldots + (-1)^p k^px^p/p!]$

Partiendo de esta fórmula, resulta fácil obtener expresiones directas para las primitivas,

(23) $\int x^p \cos rx\, dx; \int x^p \operatorname{sen} rx\, dx$

Sea, como ejemplo, el caso en que se tiene, $p = 5$. Substituyendo $k = ri$, en la fórmula (22), se tiene,

(24) $\int x^5 (\cos rx + i \operatorname{sen} rx)\, dx = 5!\, r^{-5} (\cos rx + i \operatorname{sen} rx) \times [1 - irx/1! + i^2r^2x^2/2! - i^3r^3x^3/3! + i^4r^4x^4/4! - i^5r^5x^5/5!]$

Efectuando reducciones y al separar luego partes reales y partes imaginarias, se llega a los resultados siguientes,

(25) $\int x^5 \cos rx\, dx = 5!\, r^{-5} (1 - r^2x^2/2! + r^4x^4/4!) \cos rx + 5!\, r^{-5} (rx/1! - r^3x^3/3! + r^5x^5/5!) \operatorname{sen} rx$:

(26) $\int x^5 \operatorname{sen} rx\, dx = 5!\, r^{-5} (1 - r^2x^2/2! + r^4x^4/4!) \operatorname{sen} rx - 5!\, r^{-5} (rx/1! - r^3x^3/3! + r^5x^5/5!) \cos rx$

No es difícil deducir fórmulas que generalicen estos resultados, más ello no es necesario si se tienen en cuenta los desarrollos más sencillos dados en la segunda parte de este estudio.

Veamos una variante de tales desarrollos, mediante deducción elemental. Se tiene,

(27) $\int f(x) \cos x\, dx = f(x) \operatorname{sen} x - \int f'(x) \operatorname{sen} x\, dx$
$= f(x) \operatorname{sen} x + \int f'(x)\, d. \cos x$
$= f(x) \operatorname{sen} x + f'(x) \cos x - \int f''(x) \cos x\, dx$
$= f(x) \operatorname{sen} x + f'(x) \cos x - f''(x) \operatorname{sen} x - f'''(x) \cos x + \int f''''(x) \cos x\, dx$

La continuación de este procedimiento lleva a las fórmulas,

(28) $\int f(x) \cos x\, dx = [f(x) - f''(x) + f''''(x) - \ldots] \operatorname{sen} x + [f'(x) - f'''(x) + f^{v}(x) - \ldots] \cos x$

y de manera análoga,

(29) $\int f(x) \operatorname{sen} x\, dx = [f(x) - f''(x) + f''''(x) - \ldots] \cos x - [f'(x) - f'''(x) + f^{v}(x) - \ldots] \operatorname{sen} x$

Con las primitivas estudiadas se han visto aparecer las funciones,

(30) $\mu_{4p}(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \ldots + x^{4p}/(4p)!$

(31) $\nu_{4p-1}(x) = x/1! - x^3/3! + x^5/5! - \ldots - x^{4p-1}/(4p-1)!$

(32) $\omega_{4p}(x) = 1 + x/1! + x^2/2! + \ldots + x^{4p}/(4p)!$

Se trata de polinomios constituídos con los primeros términos de los desarrollos correspondientes a las funciones,

(33) $\cos x, \operatorname{sen} x, e^x$

Las relaciones de derivación a que satisfacen las funciones circulares y exponencial, continúan siendo válidas para estas nuevas funciones. Es así como se tiene,

(34) $\mu'_{4p}(x) = -\nu_{4p-1}(x); \nu'_{4p-1}(x) = \mu_{4p-2}(x)$;

(35) $\omega_{4p}(ix) = \mu_{4p}(x) + i\, \nu_{4p-1}(x)$; etc.