

VARIACIONES EN TORNO A UN TEMA DE STEINER

Por GABRIEL POVEDA RAMOS

INTRODUCCION

1. Con motivo de un estudio que el autor adelanta sobre descentralización industrial en Colombia y sobre ubicación de fábricas, dio con el siguiente problema elemental: dadas tres ciudades, A, B, C, en un mapa plano, y dados tres números reales positivos m_1, m_2, m_3 , localizar el punto Q tal que

$$m_1 \overline{QA} + m_2 \overline{QB} + m_3 \overline{QC}$$

sea mínimo. En la realidad este problema es el que se plantea al buscar una ubicación Q para una fábrica que ha de proveer los mercados de tres ciudades A, B, C, mercados cuyo consumo anual en toneladas es m_1, m_2, m_3 respectivamente, de tal manera que el número de toneladas-kilómetros de transporte sea mínimo, y por lo tanto, que el costo de movilización del producto a los tres mercados sea mínimo, a lo largo de carreteras (u otro tipo de vías) rectilíneas. El autor ha encontrado después de minuciosas pesquisas, que el problema, aunque aparentemente simple, no es nada trivial, y que, en la literatura corriente no presenta la solución explícita para este problema, ni para algunas extensiones del mismo. Solamente el libro de Weber sobre localización de industrias (1) da una solución geométrica, aunque incompleta de este problema.

2. Desde el siglo XVII se encuentran en la literatura matemática clásica, referencias a aquella forma particular y simplificada de este problema en la cual $m_1 = m_2 = m_3$. En este caso, como es obvio se trata de determinar el punto Q desde el cual la suma de las distancias $d_1 + d_2 + d_3$ a tres puntos fijos P_1, P_2, P_3 es mínima (2).

Así lo planteó Cavalieri en 1647, y consiguió demostrar que cada lado del triángulo $P_1 P_2 P_3$ debe subtender un ángulo no menor de 120° desde el punto óptimo Q que se busca. En 1834, Heinen observó que en un triángulo que tenga un ángulo de 120° el vértice de este ángulo es el punto mínimo mencionado. Estudiando la misma cuestión para un cuadrilátero convexo, Fagnano demostró en 1775 que el punto para el cual la suma de sus distancias a los vértices es mínima, es la intersección de las diagonales. Tadenat encontró en 1810 para el caso de n puntos la condición necesaria de que la suma de los cosenos de los ángulos entre cualquier línea arbitraria en el plano y las rectas que unen los n puntos con un punto Q, debe ser cero si Q es el punto que hace mínima la suma de distancias. Finalmente Steiner probó en 1837 que las condiciones necesarias y suficientes consisten en que la suma de los cosenos y la suma de los senos de los n ángulos Q_i entre una recta arbitraria y las rectas desde Q a los vértices P_i , sean ambas nulas (3).

3. El aporte de Jakob Steiner, quien entonces era profesor de Geometría en la Universidad de Berlín (4) consistió no solo en el teorema muy importante que acabamos de mencionar, sino en que dio la solución explícita al problema examinado por Cavalieri para 3 puntos. En efecto, Steiner mostró que el punto Q desde el cual la suma de sus distancias a tres puntos A, B, C, en un plano es mínima, es aquel desde el cual los tres lados que unen los puntos dados subtienden ángulos iguales de 120° cada uno (como en la figura anexa), y que si uno de los ángulos del triángulo A B C fuera mayor de 120° , su vértice es el punto buscado. (5)

Por eso este sencillo problema se llama el problema de Steiner. Aquí lo llamaremos el problema simple de Steiner. Durante el resto del siglo pasado permaneció prácticamente olvidado, pero desde hace unos 50 años fue redescubierto por los economistas que se esforzaban en formular una teoría sistemática sobre localización de industrias (1, 6, 7, 8).

4. En el plano euclidiano el problema ponderado, para n puntos, admite una interpretación mecánica muy sencilla que, a su vez, sirve para darle siempre una solución experimental o de tipo analógico. En efecto, se trata de localizar un punto Q tal que

$$\sum_{i=1}^n m_i d_i$$

sea mínima, siendo m_1, m_2, \dots, m_n números reales *positivos*, y siendo d_i la distancia de Q a cada uno de los n puntos, P_i fijos, dados de antemano en el plano, como se muestra en la figura anexa. (Fig. 2).

5. Imaginemos un plano horizontal y liso, perforado en n puntos P_1, P_2, \dots, P_n por huecos muy finos y perfectamente lisos. Tomemos n cuerdas largas, muy livianas e inextensibles; anudémoslas todas en un mismo punto de atadura Q ; hagamos pasar el extremo libre de cada una por un hueco en el punto P_i ; y al final del extremo libre correspondiente, atemos una pesa o tara de masa m_i . Dejando luego libres esas taras, sometida cada una a su propio peso y sostenida por la cuerda correspondiente, si el sistema encuentra el equilibrio, las tensiones en las cuerdas son $m_i g$, y el punto de atadura Q adopta la posición que hace mínima la suma de sus distancias a las poleas, multiplicadas dichas distancias por las masas de las respectivas taras, como vamos a verlo.

Llamando L_i a la longitud de cada cuerda desde el punto común de atadura Q hasta el centro de gravedad de la tara (de masa m_i), pasando por el hueco en P_i , como se indica en la figura anexa, la energía potencial del sistema con respecto al plano horizontal es (Ver Fig. 3).

$$- \sum_{i=1}^n g m_i (L_i - d_i) = g \sum_{i=1}^n m_i d_i - g \sum_{i=1}^n m_i L_i$$

siendo g la aceleración de la gravedad.

De acuerdo con el principio de mínima energía potencial, de la expresión anterior se deduce que el equilibrio del sistema corresponde a la condición.

$$\min. \sum_{i=1}^n m_i d_i$$

Puede decirse también que según el principio de los trabajos virtuales de D'Alembert, la configuración de equilibrio está dada por la condición de que los trabajos virtuales compatibles con las restricciones sean nulos, es decir, que

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot g \cdot d_i = 0$$

o sea

$$\sum_{i=1}^n m_i d_i = 0$$

Esta última es precisamente la condición estacionaria del mínimo buscado. Como se ve, el problema mecánico y el problema de Steiner en el plano, son equivalentes. Además, es obvio que esta misma interpretación mecánica puede darse para el problema en 1 dimensión (segmento de recta) o en el espacio euclidiano de 3 dimensiones.

6. La cuestión de la existencia de solución puede examinarse en términos del modelo mecánico. O bien existe una configuración de equilibrio tal que el punto Q quede dentro del polígono P_1, P_2, \dots, P_n , en cuyo caso la posición de equilibrio para Q es la buscada. O bien, no existe un equilibrio en estas condiciones, en cuyo caso el punto Q es arrastrado hacia uno de los huecos, y se detiene allí, por obstrucción. En ese caso, el punto ocupado por ese hueco es la solución del problema. De todos modos, el modelo indica que el problema en el plano tiene siempre solución (aunque no necesariamente única), y que dicha solución pertenece siempre a la envoltura convexa del conjunto de puntos P_1, P_2, \dots, P_n . Desde luego, el modelo permite determinar experimentalmente una solución gráfica. En este caso el modelo mecánico actúa como un computador analógico.

7. Cuando se trata de identificar el punto de mínima suma de distancias a n puntos dados, el modelo mecánico se construye poniendo $m_i = 1$, ($i = 1, 2, \dots, n$). Un punto Q^* interior al polígono es el punto mínimo si y solo si es el punto de equilibrio para la atadura de las n cuerdas. En tal caso, las tensiones en las cuerdas son $m_i g = g$; y sus proyecciones sobre cualquier par de rectas perpendiculares entre sí que pasen por Q^* , son $g \cdot \sin \theta_i$, $g \cdot \cos \theta_i$ siendo θ_i el ángulo formado con una misma de tales rectas por la cuerda que va a la polea P_i . Hay equilibrio si y solo si las sumas de las proyecciones de las tensiones sobre ambas rectas, son nulas:

$$(1.7.1) \sum_{i=1}^n \sin \theta_i = 0; \quad (1.7.2) \sum_{i=1}^n \cos \theta_i = 0$$

Este es precisamente el teorema demostrado por Steiner en 1837.

8. El problema general (ponderado) de Steiner para n puntos en un espacio de m dimensiones se puede enunciar así:

Sean P_1, P_2, \dots, P_n puntos distintos en un espacio geométrico de n dimensiones, y m_1, m_2, \dots, m_n números reales no todos nulos, positivos o negativos, dados. Determinar el punto Q^* que hace mínima la forma lineal homogénea

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot d(QP_i)$$

siendo $d(QP_i)$ la distancia geodésica de Q a P_i (8, 9).

Como para otro cualquiera, lo primero que debe plantearse son las cuestiones de existencia y unicidad. Aquí (como en el problema de Plateau, con el cual este tiene ciertos rasgos formalmente semejantes), lo primero que se debe investigar es si existe siempre un punto geodésicamente conectable con los P_i . Se sabe bien que esto es posible en un espacio euclídeo, pero no en cualquier espacio geométrico.

Luego, deberá investigarse si existe un mínimo y cuales son las condiciones necesarias y suficientes para ello; y posteriormente, si ese mínimo es único o es múltiple, y en qué casos. Y por fin, si las tres cuestiones anteriores tienen respuesta favorable, será necesario caracterizar la solución, ojalá mediante un procedimiento constructivo.

Hay que decir que el problema, en su forma general, no ha recibido hasta hoy un tratamiento completo, en estos términos. Los pocos casos particulares en que se conoce una solución explícita completa y unívoca, corresponden a $n \leq 4$, con factores ponderales m_i todos positivos, en el espacio euclidiano de 2 dimensiones, o sobre la esfera. Inclusive los que presentamos aquí, que creemos no han sido publicados antes, revisten estos caracteres bastante sencillos.

9. La estadística elemental nos permite darle otra interpretación al problema de Steiner. Como bien se sabe, se llama *mediana* de una distribución de números reales distintos x_1, x_2, \dots, x_n , con frecuencias relativas m_1, m_2, \dots, m_n , respectivamente a un número no menor que la mitad de los números en la distribución dada, y menor que la otra mitad. Fácilmente se demuestra que la mediana L es también un número que hace mínima la suma

$$\sum_{i=1}^n m_i |X_i - p|, \quad p \in \mathbb{R}$$

Pasando de la recta a cualquier espacio métrico, se ve que el punto Q que se investiga en el problema de Steiner puede también llamarse punto *mediano* de P_1, \dots, P_n . Esta interpretación es original del autor.

10. En lo que sigue nos ocupamos de los siguientes aspectos relacionados con este problema:

- a) El problema ponderado de tres puntos en el plano euclidiano.
- b) El problema ponderado de tres puntos en la esfera.
- c) El problema ponderado de cuatro puntos en el plano.
- d) Algunas consideraciones sobre el problema de n puntos en el plano.

Aunque todos estos son aspectos elementales, el autor no ha podido encontrar publicados en la literatura corriente varios de los resultados que se presentan aquí, a pesar de haberlos buscado prolijamente. (Ver la bibliografía, al final).

EL PROBLEMA DE LOS TRES PUNTOS EN EL PLANO

1. Sean P_1, P_2, P_3 , tres puntos distintos fijos en un plano, y localicemos el punto Q cuyas distancias d_i a los puntos P_i respectivamente, hagan mínima la suma

$$S = m_1 d_1 + d_2 + m_3 d_3$$

siendo m_1, m_2, m_3 , números reales prescritos, estrictamente positivos. En primer lugar, es obvio que dicho punto no está fuera del triángulo. Además S es una función de punto definida en todo el triángulo, inclusive en los lados, es decir sobre un conjunto compacto según la topología usual del plano. Así mismo S es continua en el interior del triángulo. Por lo tanto, S tiene un mínimo, y lo adopta en el interior del triángulo o en algún punto de su perímetro.

2. Admitamos, en primer lugar que el punto de mínimo, Q^* , está en el interior del triángulo. Para localizarlo podemos utilizar un razonamiento geométrico inspirado en el principio de optimalidad de Bellmann-Pontryagin. (20).

Sea Q^* el punto mínimo (o punto de Steiner) y variemos infinitesimalmente su posición, manteniendo d_1 constante, es decir, en la dirección de la tangente en Q^* a una circunferencia de radio d_1 centrada en P_1 . (Ver figura 4 anexa). En estas condiciones deberá tenerse para la variación infinitesimal.

$$(m_2 d_2 + m_3 d_3) = 0$$

lo cual equivale a

$$(2.2.1) \quad m_1/m_2 = \text{sen } \alpha_3/\text{sen } \beta_3$$

Repitiendo estas consideraciones al mantener d_2 constante y luego d_3 constante, se obtiene

$$(2.2.2) \quad m_2/m_3 = \text{sen } \alpha_1/\text{sen } \beta_1$$

$$(2.2.3) \quad m_3/m_1 = \text{sen } \alpha_2/\text{sen } \beta_2$$

Observando que $\beta_1 = a_2$, $\beta_2 = a_3$, $\beta_3 = a_1$, $a_1 + a_2 + a_3 = \pi$ se deduce como solución del sistema formado por las últimas tres ecuaciones:

$m_1 : m_2 : m_3 = \text{sen } a_3 : \text{sen } a_2 : \text{sen } a_1$ es decir, que los tres ángulos a_1 , a_2 , a_3 son los ángulos de un triángulo cuyos lados opuestos son respectivamente proporcionales a m_2 , m_3 , m_1 (supuesto que cada m sea menor que la suma de los otros dos), como se indica en la figura 5.

$$(2.2.4) \quad \text{sen } a_1 = K m_2 \text{sen } a_2 = k m_3 \text{sen } a_3 = k m_1$$

Aplicando la ley del coseno al triángulo de la figura, se tiene:

$$m_3^2 = m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \sqrt{1 - k^2 m_3^2}$$

y después de algunas operaciones se encuentra

$$k = \frac{\sqrt{4m_1^2 m_3^2 - (m_1^2 - m_2^2 + m_3^2)^2}}{2m_1 m_2 m_3}$$

que es un número real (por ser $m_1 < m_2 + m_3$) como puede demostrarse fácilmente. Así pueden calcularse explícitamente los ángulos a_1 , a_2 , a_3 .

Fácilmente se advierte que en el caso simple, cuando $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, k vale $\sqrt{3/2}$, y $a_1 = a_2 = a_3 = 60^\circ$. En consecuencia, los ángulos entre las rectas que van desde Q hasta los vértices son de 120° , como lo encontró Steiner razonando de otra manera.

3. En el punto Q se tiene simultáneamente

$$\delta (m_1 d_1 + m_2 d_2) = 0$$

$$\delta (m_2 d_2 + m_3 d_3) = 0$$

$$\delta (m_3 d_3 + m_1 d_1) = 0$$

Sumando y dividiendo por 2 se vuelve a encontrar la condición estacionaria del mínimo.

$$(2.3.1) \quad \delta (m_1 d_1 + m_2 d_2 + m_3 d_3) = \delta S = 0$$

siendo δ el operador de variación (infinitesimal y arbitraria). La variación puede calcularse dando a Q un desplazamiento infinitesimal. Según que lo hagamos hacia P_1 , hacia P_2 o hacia P_3 se tendrá (Ver figura 5):

$$\delta S = [-m_1 + m_2 \cos a_2 + m_3 \cos a_1] h$$

$$\delta S = [-m_2 + m_3 \cos a_3 + m_1 \cos a_2] h$$

$$\delta S = [-m_3 + m_1 \cos a_1 + m_2 \cos a_3] h$$

siendo h el valor absoluto o módulo del desplazamiento dado a Q . Por la condición (2.3.1) se deducen las identidades.

$$(2.3.2) \quad \begin{aligned} m_1 &= m_2 \cos a_2 + m_3 \cos a_1 \\ m_2 &= m_3 \cos a_3 + m_1 \cos a_2 \\ m_3 &= m_1 \cos a_1 + m_2 \cos a_3 \end{aligned}$$

Estas identidades pueden también deducirse de las relaciones (2.2.4) y de las identidades

$$\text{sen } a_3 = \text{sen } (a_1 + a_2)$$

$$\text{sen } a_1 = \text{sen } (a_2 + a_3)$$

$$\text{sen } a_2 = \text{sen } (a_3 + a_1)$$

que son obvias.

4. Sean OXY un sistema de coordenadas cartesianas en el plano que contiene los tres puntos dados (Ver figura 6), y sean (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) las coordenadas de los mismos, y (x, y) las coordenadas de Q . La función que se trata de hacer mínima es

$$S = \sum_{i=1}^3 m_i \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

Si Q es el punto mínimo y es interior al triángulo, las derivadas parciales respecto a x y respecto a y deben ser ambas nulas:

$$\sum m_i \frac{x - x_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} = 0$$

$$\sum m_i \frac{y - y_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} = 0$$

Llamando θ_i el ángulo que forma el segmento orientado $P_i Q$ con una recta que pase por P_i paralelamente a $O X$, las ecuaciones anteriores pueden escribirse

$$\begin{aligned}\sum m_i \cos \theta_i &= 0 \\ \sum m_i \operatorname{sen} \theta_i &= 0\end{aligned}$$

Obsérvese que θ_i es también el ángulo que forma el segmento orientado QP_i con la recta r . Se tiene así el teorema demostrado por Steiner en 1837 para el problema simple no-ponderado (3).

5. Para localizar dicho punto Q en el plano, en forma gráfica, es necesario calcular al menos dos de los ángulos B_1, B_2, B_3 .

En la figura 5 es evidente que

$$(2.5.1) \quad B_1 + A_2 - B_2 = a_2$$

$$(2.5.2) \quad B_2 + A_3 - B_3 = a_3$$

Además, aplicando la ley del seno a los triángulos $QP_2 P_3$ y $QP_1 P_2$, e igualando su lado común QP_2 , se deduce

$$L_3 \frac{\operatorname{sen} B_1}{\operatorname{sen} (a_3 + a_1)} = L_1 \frac{\operatorname{sen} (A_3 - B_3)}{\operatorname{sen} (a_1 + a_2)}$$

o sea

$$(2.5.3) \quad \frac{\operatorname{sen} (A_3 - B_3)}{\operatorname{sen} B_1} = \frac{\operatorname{sen} A_3 \cdot \operatorname{sen} (a_1 + a_2)}{\operatorname{sen} A_1 \cdot \operatorname{sen} (a_3 + a_1)}$$

El lado derecho de esta igualdad es una constante que llamaremos λ . Combinando las ecuaciones (2.3.1), (2.3.3) se tiene la ecuación

$$\operatorname{sen} (a_3 - B_2) = \lambda \cdot \operatorname{sen} (B_2 + \epsilon_2) \text{ siendo } \epsilon_2 = a_2 - A_2$$

Después de algunas operaciones trigonométricas y algebraicas, se obtiene

$$\operatorname{sen} B_2 = \frac{\operatorname{sen} a_3 - \lambda \cdot \operatorname{sen} (a_2 - A_2)}{\sqrt{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cdot \cos (a_3 + a_2 - A_2)}}$$

y de las ecuaciones (2.5.1) se obtienen B_1 y B_3 :

$$\begin{aligned}B_1 &= B_2 + a_2 - A_2 \\ B_3 &= B_2 - a_3 + A_3\end{aligned}$$

Estos son los ángulos que forman las rectas que van de los vértices al punto óptimo Q , con los lados del triángulo.

Después de algunas operaciones algebraicas y trigonométricas, se encuentra

$$\operatorname{sen} B_3 = \frac{\operatorname{sen} A_3 + \lambda \operatorname{sen} (A_2 - a_2 - A_3 + a_3)}{\sqrt{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cdot \cos (a_3 + a_2 - A_2)}}$$

y

$$\operatorname{sen} B_1 = \frac{\operatorname{sen} (a_3 + a_2 - A_2)}{\sqrt{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cdot \cos (a_3 + a_2 - A_2)}}$$

Estas expresiones permiten localizar el punto óptimo (supuesto que sea interior).

6. El valor mínimo de

$$S = m_1 d_1 + m_2 d_2 + m_3 d_3$$

será entonces,

$$m_1 L_2 \frac{\operatorname{sen} B_3}{\operatorname{sen} (a_2 + a_3)} + m_2 L_3 \frac{\operatorname{sen} B_1}{\operatorname{sen} (a_3 + a_1)} + m_3 L_1 \frac{\operatorname{sen} B_2}{\operatorname{sen} (a_1 + a_2)}$$

Este número puede llamarse con propiedad y con justicia "diámetro de Steiner" del triángulo.

7. Es interesante advertir que el punto que hace mínima a

$$m_1 d_1 + m_2 d_2 + m_3 d_3$$

no puede estar sobre uno de los lados del triángulo (fuera de los vértices). En efecto, si P es un punto sobre uno solo de los lados del triángulo (por ejemplo, sobre $P_1 P_2$), dándole a P un desplazamiento infinitesimal \vec{dP} hacia el interior del triángulo y perpendicularmente al lado que contiene P, la función

$$S = m_1 \overline{PP_1} + m_2 \overline{PP_2} + m_3 \overline{PP_3}$$

tiene un diferencial

$$ds = m_3 \cos \gamma_3 |\vec{dP}| < 0$$

en donde γ_3 es el ángulo con vértice en P formado por PP_3 y la normal a $P_1 P_2$ en P (Ver figura 7).

De tal manera que, cuando el punto de Steiner no es inferior al triángulo, necesariamente debe estar en uno de los vértices.

8. No es posible construir el triángulo de la figura 5 en el caso de que alguno de los números m_1, m_2, m_3 sea mayor o igual a la suma de los otros. En tal caso sea, por ejemplo, $m_1 \geq m_2 + m_3$; consideremos un punto móvil P coincidente con P_1 , y démosle a P un desplazamiento arbitrario infinitesimal \vec{dP} hacia el interior del triángulo $P_1 P_2 P_3$. Entonces

$$dS = (m_1 - m_2 \cos \gamma_2 - m_3 \cos \gamma_3) |\vec{dP}|$$

siendo γ_2 el ángulo formado por \vec{dP} con $P_1 P_2$ y γ_3 el ángulo formado por \vec{dP} con $P_1 P_3$ (Ver figura 8). Pero γ_2 y γ_3 son menores que 180° y por eso

$$m_1 \geq m_2 + m_3 > m_2 \cos \gamma_2 + m_3 \cos \gamma_3$$

luego

$$m_1 - m_2 \cos \gamma_2 - m_3 \cos \gamma_3 > 0 \Leftrightarrow ds > 0$$

Esto significa que el punto óptimo está en P_1 , es decir en el vértice cuyo coeficiente puntual es mayor que la suma de los otros dos.

9. Puede suceder que cada uno de los coeficientes m sea menor que la suma de los otros dos, en cuyo caso puede construirse el triángulo de la figura 5, con lados proporcionales a dichos coeficientes, pero que uno de los ángulos interiores del triángulo $P_1 P_2 P_3$ sea mayor que la suma de los dos ángulos α que deben formar las tres rectas que parten de Q^1 a los tres vértices P_1, P_2, P_3 .

Supongamos por ejemplo, que $A_1 > \alpha_1 + \alpha_2$. En ese caso, ninguno de los otros dos ángulos, A_2, A_3 puede tener la propiedad análoga, porque si, por ejemplo A_2 fuera

$$A_2 > \alpha_2 + \alpha_3$$

resultaría que

$$A_1 + A_2 > \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \alpha_2 > \pi$$

lo cual no es posible.

Admitamos pues, que $A_1 > \alpha_1 + \alpha_2$.

Si a partir de P_1 damos a un punto móvil P un desplazamiento infinitesimal \vec{dP} hacia el interior del triángulo, en la dirección indicada por la línea r (Ver figura 9), se tiene

$$ds = [m_1 - m_2 \cos \phi - m_3 \cdot \cos (A - \phi)] \cdot \vec{dP}$$

$$m_1 > m_1 \cos \phi$$

$$\phi > \alpha_2 - \theta \Rightarrow \cos \phi < \cos (\alpha_2 - \theta) \Rightarrow -m_2 \cos \phi > -m_2 \cos (\alpha_2 - \theta)$$

$$A_1 - \phi > \alpha_1 + \theta \Rightarrow \cos (A_1 - \phi) < \cos (\alpha_1 + \theta) \Rightarrow -m_3 \cos (A_1 - \phi) > -m_3 \cos (\alpha_1 + \theta)$$

$$ds = m_1 - m_2 \cos \phi - m_3 \cos (A_1 - \phi) > m_1 \cos \theta - m_2 \cos (\alpha_2 - \theta) - m_3 \cos (\alpha_1 + \theta) =$$

$$m_1 \cos \theta - m_2 (\cos \alpha_2 \cos \theta + \text{sen } \alpha_2 \text{ sen } \theta) - m_3 (\cos \alpha_1 \cos \theta - \text{sen } \alpha_1 \text{ sen } \theta) =$$

$$(m_1 - m_2 \cos \alpha_2 - m_3 \cos \alpha_1) \cos \theta - (m_2 \text{ sen } \alpha_2 - m_3 \text{ sen } \alpha_1) \text{ sen } \theta = 0$$

El coeficiente de $\cos \theta$ es nulo por la ecuación (2.3.2). Además

$$m_2 \operatorname{sen} a_2 - m_3 \operatorname{sen} a_1 = (\operatorname{sen} a_1 \operatorname{sen} a_2 - \operatorname{sen} a_2 \cdot \operatorname{sen} a_1) / K = 0.$$

Por lo tanto, de P_1 hacia el interior del triángulo $P_1 P_2 P_3$, se tiene

$$ds/d\vec{dP} > 0$$

Por un razonamiento análogo, podría demostrarse que, partiendo de P_2 o de P_3 hacia el interior del triángulo, podría tenerse

$$ds/d\vec{dP} < 0$$

En consecuencia: si $A_1 > a_1 + a_2$, el mínimo para $S = m_1 d_1 + m_2 d_2 + m_3 d_3$ está en el vértice P_1 .

10. Teorema: Sean tres puntos distintos P_1, P_2, P_3 en el plano, que forman un triángulo con ángulos interiores A_1, A_2, A_3 ; y sean m_1, m_2, m_3 sendos coeficientes reales positivos. El punto Q desde el cual sus distancias d_1, d_2, d_3 a los tres datos P_1, P_2, P_3 hace mínima la forma lineal homogénea

$$m_1 d_1 + m_2 d_2 + m_3 d_3$$

puede llamarse punto mediano ponderado de P_1, P_2, P_3 , y es el siguiente:

a) Si $m_i \geq m_j + m_k$, el punto mínimo Q coincide con P_i , siendo $i \neq j \neq k \neq i$, y además $(i, j, k) \in (1, 2, 3)^3$.

b) Si $A_i \geq a_i + a_{i+1}$ (en donde $i+1$ se calcula en la aritmética aditiva módulo 3), y siendo

$$(3.10.1) \quad \operatorname{sen} a_i = \frac{\sqrt{4 m_1^2 m_3^2 - (m_1^2 - m_2^2 + m_3^2)^2}}{2 m_1 m_2 m_3} m_{i+1} = k m_{i+1}$$

el punto Q está en P_i

c) En los demás casos Q es interior al triángulo y es el punto desde el cual las rectas que van a los vértices forman los ángulos

$$\widehat{P_1 Q P_2} = a_3 + a_1, \quad \widehat{P_2 Q P_3} = a_1 + a_2, \quad \widehat{P_3 Q P_1} = a_2 + a_3$$

estando los a_i definidos por (3.10.1). El punto así localizado se llama *punto interno* de Steiner.

11. Como ejemplo de la aplicación del teorema enunciado, vamos a considerar el problema hipotético de localizar una fuente de suministro de un artículo para Bogotá, Medellín y Cali, cuyo consumo es rigurosamente proporcional a la población, y transportado por vía aérea a precio constante la tonelada-kilómetro. En este caso los coeficientes m_i son los valores de la población de las ciudades, así:

| | |
|------------------|-------------------|
| P_1 : Bogotá | $m_1 = 2.515.096$ |
| P_2 : Medellín | $m_2 = 1.096.790$ |
| P_3 : Cali | $m_3 = 921.690$ |

En este caso $m_1 > m_2 + m_3$, luego la localización óptima es Bogotá.

Consideremos también el caso del abastecimiento de ácido sulfúrico desde una sola fábrica. Los coeficientes ponderales en este caso pueden ser los porcentajes que el consumo de cada ciudad representa en el total nacional, así:

| | |
|------------------|----------------|
| P_1 : Bogotá | $m_1 = 13.3\%$ |
| P_2 : Medellín | $m_2 = 16.3\%$ |
| P_3 : Cali | $m_3 = 23.3\%$ |

La solución está gráficamente indicada en la figura 10, en donde se ve que el punto de localización óptima por costo de transporte para una fuente única sería la población de Circasia.

Otro ejemplo de los resultados obtenidos puede darse frente al caso del triángulo Bogotá, Medellín, Bucaramanga: el punto de la mínima suma de distancias (no ponderadas) a las 3 ciudades, está en determinado sitio del Departamento de Boyacá cerca a la población de Puerto Niño. Sin embargo, si la suma de las distancias es afectada por coeficientes ponderales proporcionales a la población de las ciudades, y teniendo en cuenta que la población de Bogotá (2.515.096) es mayor que la suma de la población de Medellín (1.096.790) más la población de Bucaramanga (318.267) resulta que el punto que hace mínima la suma de las distancias ponderadas según la población está en Bogotá.

Por esta razón cuando se discutió la conexión por carretera de Medellín a Bogotá el Departamento Nacional de Planeación y la Universidad de Harvard se equivocaron al insistir que la conexión se hiciera en forma de estrella, con centro en algún punto sobre el río Magdalena, ya que lo que se hubiera tratado de hacer mínima debiera haber sido la movilización de carga y no simplemente la suma de las distancias. Con este criterio la conexión óptima sería la conexión directa Medellín-Bogotá y la conexión directa Bogotá-Bucaramanga.

12. Recordando la interpretación geográfico-económica que hemos dado al problema de Steiner como problema de ubicación óptima para una fuente de suministro, salta a la vista el interés que tiene estudiarlo sobre la esfera como versión de la misma cuestión geográfico-económica a nivel global internacional.

En estas condiciones el problema consiste en localizar el punto Q^* que hace mínima la función.

$$S = m_1 d_1 + m_2 d_2 + m_3 d_3$$

en donde las d_i son las distancias a lo largo de círculos máximos (geodésicas esféricas) desde Q hasta tres puntos fijos P_1, P_2, P_3 situados sobre una misma esfera. Obviamente Q debe estar en la misma esfera.

Si ϕ, θ son respectivamente la longitud y la latitud de un punto Q sobre la esfera unidad, las distancias a los puntos P_i están dadas por

$$d_i = \arcsos [\cos \theta \cdot \cos \theta_i \cdot \cos (\phi - \phi_i) + \text{sen } \theta \text{ sen } \theta_i], \text{ con } 0 \leq d_i \leq \pi$$

restringiendo los arcos a un hemisferio para eliminar la ambigüedad respecto a la función arcoseno.

13. Si el punto Q^* fuera interior al triángulo esférico, deberá satisfacer las condiciones

$$\partial S / \partial \theta = 0, \partial S / \partial \phi = 0$$

que, en este caso, se escriben

$$(2.13.1) \quad \sum_{i=1}^3 m_i \frac{\cos \theta \cdot \cos \theta_i \cdot \text{sen } (\phi - \phi_i)}{\text{sen } \theta_i} = 0$$

$$(2.13.2) \quad \sum_{i=1}^3 m_i \frac{\text{sen } \theta \cdot \cos \theta_i \cos (\phi - \phi_i) - \cos \theta \cdot \text{sen } \theta_i}{\text{sen } \theta_i} = 0$$

Lamentablemente no hay un algoritmo algebraico para la solución de este sistema de ecuaciones. Existen métodos de solución numérica adaptables a programación en computadores, tales como el de máxima pendiente, el de tangentes paralelas ("partan"), y el método "costumbrizado" (ing: "Customized Method"). (13, 14, 15).

14. Desde 1775, Fagnano demostró que para el cuadrivértice convexo plano, el punto que hace mínima la suma de distancias a los vértices es la intersección de las diagonales (5). Así, por ejemplo, Bogotá, Medellín, Cali y Bucaramanga forman un cuadrivértice convexo, cuyas diagonales se cortan en un punto sobre la margen izquierda del río Magdalena, ligeramente al sur de La Dorada.

En el cuadrilátero cóncavo el punto de mínima suma de distancias es el punto de concavidad k , que es único (Ver figura 11). Bogotá, Medellín, Barranquilla y Cali forman un cuadrivértice cóncavo, cuyo ángulo interior mayor que 180° está en Medellín. Esta ciudad es pues el punto de mínima suma de distancias a las cuatro.

El lector puede hacer por sí mismo ambas demostraciones, que son muy sencillas, y puede verificarlas recurriendo al modelo mecánico explicado antes, poniendo $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$.

15. El problema de determinar para un cuadrivértice (convexo o cóncavo) P_1, P_2, P_3, P_4 , cual es el punto Q^* que hace mínima la suma ponderada de las distancias, es decir, la función

$$S = m_1 d_1 + m_2 d_2 + m_3 d_3 + m_4 d_4 \quad (d_i = \overline{Q^* P_i} \quad m_i \geq 0)$$

tampoco se encuentra discutido suficientemente en la literatura existente, ni resuelto explícitamente.

16. Estudiemos el caso del cuadrivértice convexo (Ver figura 12), con coeficientes ponderales m_1, m_2, m_3, m_4 . Si el punto interior Q es el punto de Steiner, debe satisfacer la condición (1.7.2) Aplicando esta condición respecto a las direcciones QP_1, QP_2, QP_3, QP_4 , se obtienen las siguientes ecuaciones que se explican por sí solas:

$$m_2 \cos a_1 + m_4 \cos a_4 + m_3 \cos (a_1 + a_2) = m_1 \quad (\text{Proyecciones sobre } QP_1)$$

$$m_1 \cos a_1 + m_3 \cos a_2 + m_4 \cos (a_2 + a_3) = m_2 \quad (\text{Proyecciones sobre } QP_2)$$

$$m_2 \cos a_2 + m_4 \cos a_3 + m_1 \cos (a_1 + a_2) = m_3 \quad (\text{Proyecciones sobre } QP_3)$$

$$m_3 \cos a_3 + m_1 \cos a_4 + m_2 \cos (a_2 + a_3) = m_4 \quad (\text{Proyecciones sobre } QP_4)$$

Estas cuatro ecuaciones definen implícitamente los cuatro ángulos, que, además, cumplen la condición

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2\pi$$

condición que ya ha sido incorporada a las ecuaciones anteriores.

BIBLIOGRAFIA

1. WEBER, ALFRED. Theory of the Location of Industries. Traducida del alemán, con una introducción y notas de Carl J. Friedrich, The University of Chicago Press, Chicago, 1968, 256 páginas.
2. Enciklopadie der Mathematischen Wissenschaften, vol. 3, part. 1., Leipzig, B. G. Teubner, 1907.
3. COOPER, LEON. "Location-allocation problems". Operations Research, vol. 11, N° 3, 1963, pp. 331-343.
4. STEINER, JAKOB (1796-1863). Enciclopedia Británica, vol. 21, 1962, p. 377.
5. COURANT, RICHARD y ROBBINS, HEBERT. ¿Qué es la Matemática? Madrid, Ed. Aguilar, 1955, 523 pp.
6. ISARAD, WALTER. Location and space-economy. New York, Wiley, 1956, 350 p.
7. EISEMAN, K. "Problem 62-11. The Optimum location of a center". Siam Review, col. 4, oct. 1962, pp. 394-395.
8. MOSES, LEON N. "Location and the theory of production". Quarterly Journal of Economics. vol. 72, may 1958, pp. 259-272.
An extension of classical Weberian Location-triangle analysis to include substitution between inputs as their delivered prices vary over the location plain.
9. MELZAK, Z. A. "On the problem of Steiner". Canad. Math. Bull. vol. 4, 1961, pp. 143-148.
10. COCKAYNE, E. J. "On the Steiner problem". Canad. Math. Bull. vol. 10. 1967, pp. 431-450.
11. COOPER, LEÓN. "Heuristic methods for location allocation problems". Siam Review, vol. 6, N° 1, january 1964, pp. 37-51.
12. PRIM, R. C. "Shortest connecting networks". Bell system tech. J., 3, 1957, pp. 1398-1401.
13. KROLIKOWSKI, THOMAS. A generalized single source locational problem. (A Boston University, College of Business Administration Faculty working paper). 1969, 29 p. mecanogr.
14. DOERFLER, T. E. Partan, minimization by method of parallel tangents (internal memorandum). Iowa State University, april 1964, pp. 1-7.
15. COCKAYNE, E. J. Computation of minimal length full Steiner trees on the vertices of a convex polygon. Rep. 14, Dept. of Mathematics. Univ. of Victoria, British Columbia, 1968.
16. GILBERT, E. N. and POLLAK, H. O. "Steiner minimal trees". Siam journal on applied math, vol. 16 N° 1, january 1968, pp. 1-29.
17. COCKAYNE, E. J. "On the efficiency of the algorithm for Steiner minimal trees". Siam journal on applied math, vol. 18, N° 1, january 1970, pp. 150-159.
18. WILDE, D. J. Optimum seeking methods. Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall, 1964.

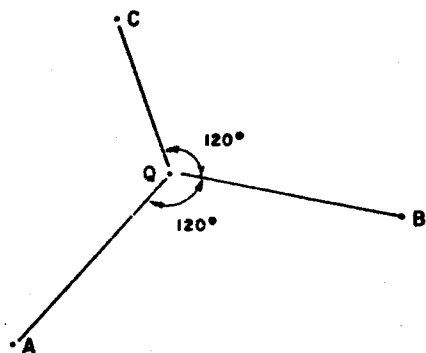


FIG. 1

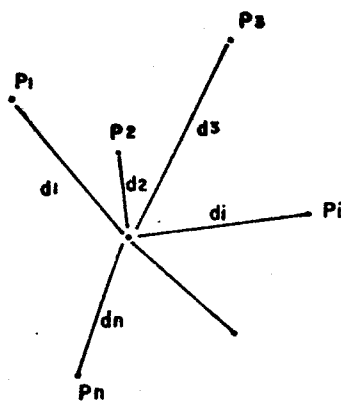


FIG. 2

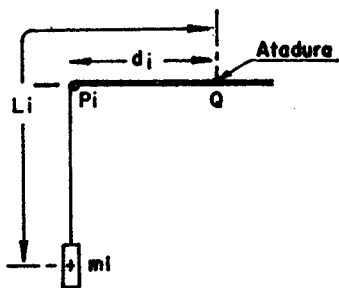


FIG. 3

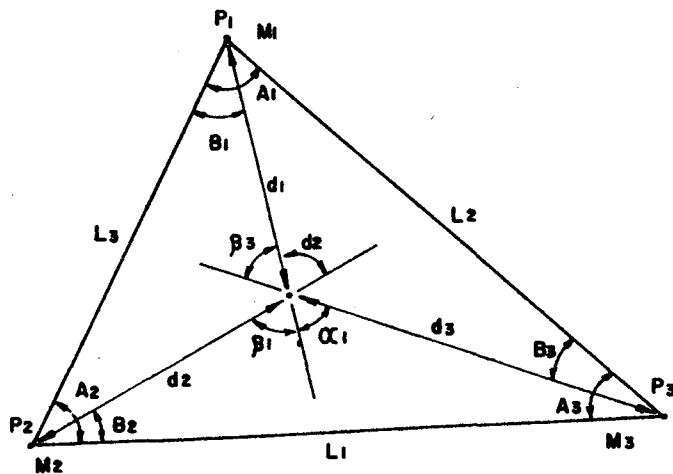


FIG. 4

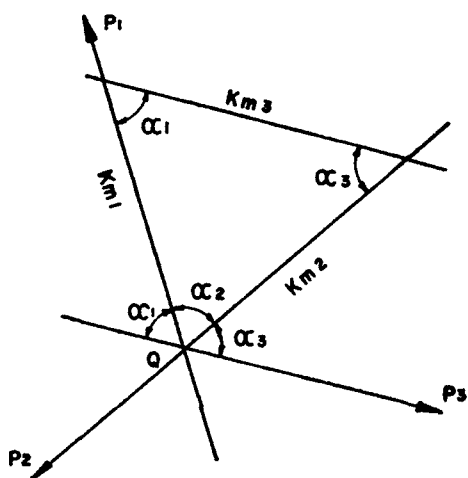


FIG. 5

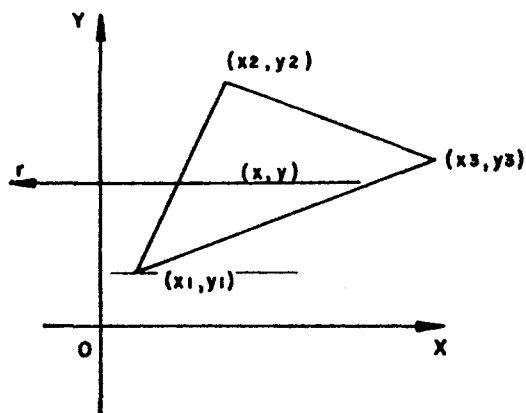


FIG. 6

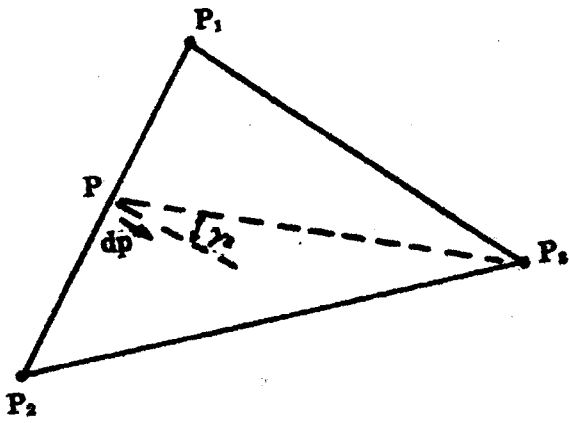


Fig. 7

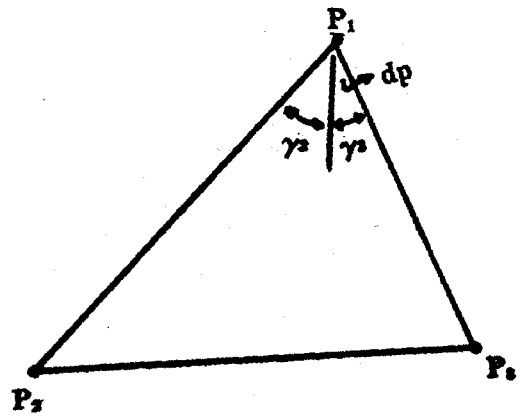


Fig. 8

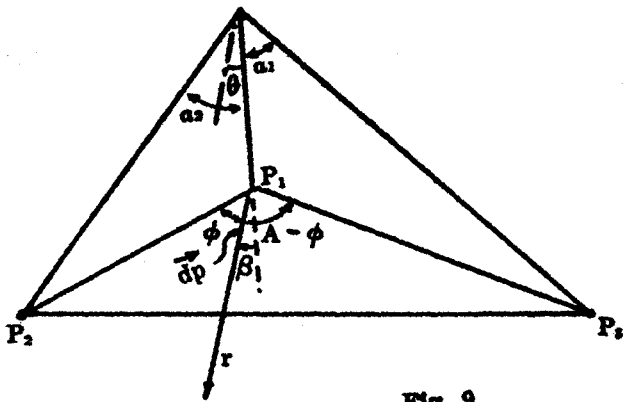


Fig. 9

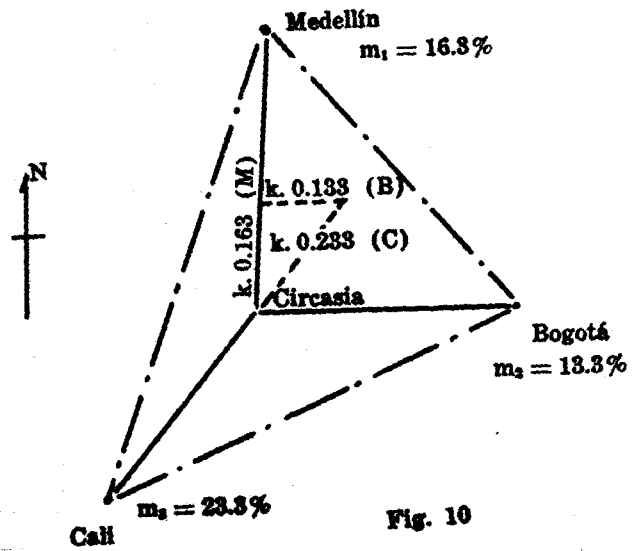


Fig. 10

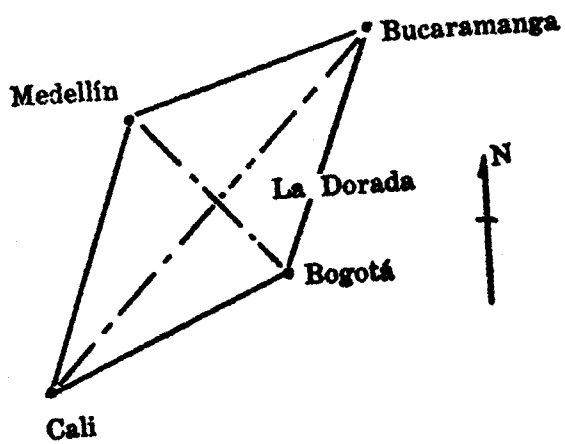


Fig. 11

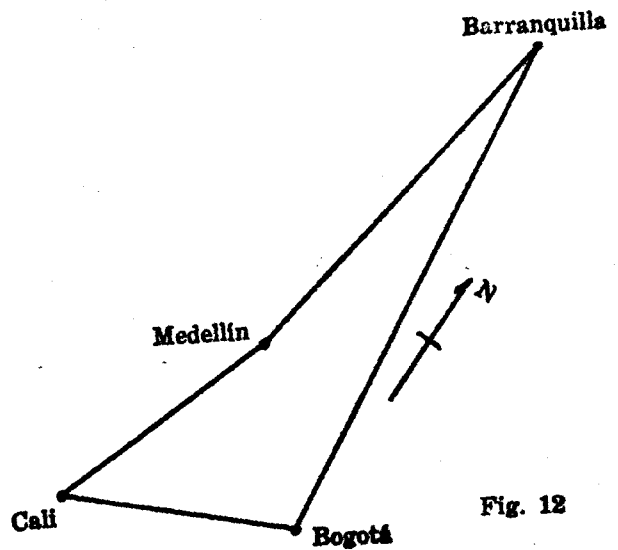


Fig. 12