MECANICA CELESTE

MOVIMIENTO ELIPTICO (METODO DE JACOBI)

JULIO GARAVITO A.
Director del Observatorio Astronómico Nacional, de 1893 a 1919.

Sean $A(m, \xi, \eta, \zeta)$ y $C(M, \xi_o, \eta_o, \zeta_o)$ dos astros, a saber: el planeta A y el sol C. Se trata de hallar el movimiento relativo del planeta en relación con el sol. Las ecuaciones de movimiento absoluto, después de divididas por las masas respectivas, son:

$$(J) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{fM}{r^3}(\xi - \xi_o) \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{fM}{r^3}(\eta - \eta_o)$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\frac{fM}{r^3}(\zeta - \zeta_o) \qquad \frac{d^2\xi_o}{dt^2} = +\frac{fM}{r^3}(\xi - \xi_o) \qquad \frac{d^2\eta_o}{dt^2} = \frac{fM}{r^3}(\eta - \eta_o) \qquad \frac{d^2\zeta_o}{dt^2} = \frac{fM}{r^3}(\zeta - \zeta_o).$$

Pongamos: $\quad x_1 = \xi - \xi_o \qquad x_2 = \eta - \eta_o \qquad x_3 = \zeta - \zeta_o.$

De donde
$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{d^2\xi_o}{dt^2} \qquad \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dt^2} - \frac{d^2\eta_o}{dt^2} \qquad \frac{d^2x_3}{dt^2} = \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \frac{d^2\zeta_o}{dt^2}$$

Así, de (J) se deduce:

$$(J)' \qquad \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{f(M+m)}{r^3}x_1 \qquad \frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{f(M+m)}{r^3}x^2 \qquad \frac{d^2x_3}{dt^2} = -\frac{f(M+m)}{r^3}x_3$$

Sea $D[(M+m), \Xi, H, \zeta]$ el centro de gravedad del sistema de los dos cuerpos A y C. Se tendrá:

$$(M+m)\,\Xi = M\xi_o + m\xi \qquad (M+m)\,H = M\eta_o + m\eta \qquad (M+m)\,\zeta = M\zeta_o + m\zeta$$

De donde
$$\Xi = \frac{M\xi_o + m\xi}{M+m} \qquad H = \frac{M\eta_o + m\eta}{M+m} \qquad \zeta = \frac{M\zeta_o + m\zeta}{M+m}$$

Figura 1a.

Sistema que tomaremos por origen de las nuevas coordenadas. Consideremos en la dirección DA un punto A' tal que $A'D = // AC$. Las coordenadas de A' con relación a D serán las de A con relación a C. Las ecuaciones $(J)'$ son las del movimiento de un punto ficticio A' de masa m' atraído, según la ley de Newton, por una masa fija $M' = M + m$ situada en el origen D de coordenadas. Dichas ecuaciones representan también las aceleraciones de A en su movimiento relativo con relación a C. ¿Cuál deberá ser el valor m' de la masa ficticia de A' para que las cantidades de movimiento de A' con relación a D sean las de A con relación a C?

Como el centro de gravedad D del sistema puede considerarse en reposo sin que por ello se alteren en nada las ecuaciones de movimiento, haremos:

$$\frac{d\Xi}{dt} = \frac{dH}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = o \qquad \text{Lo que nos dará:} \qquad M\frac{d\xi_o}{dt} + m\frac{d\xi}{dt} = o \quad \text{etc.} \quad m\frac{d\xi}{dt} = -M\frac{d\xi_o}{dt} \qquad (\alpha)$$

Ahora bien, la cantidad de movimiento absoluto proyectada sobre $O\xi$ del punto A cuando D está en reposo, deberá ser la cantidad de movimiento de A' con relación a D. Se deberá, pues, tener:

$$m\frac{d\xi}{dt} = m'\frac{dx_1}{dt}.$$

Por tanto de (α) se saca, restando de ambos miembros $m\dfrac{d\xi_o}{dt}$

$$m\left(\frac{d\xi}{dt} - \frac{d\xi_o}{dt}\right) = m\frac{dx_1}{dt} = -(M+m)\frac{d\xi_o}{dt} \qquad \therefore \qquad -\frac{d\xi_o}{dt} = \frac{m}{M+m}\cdot\frac{dx_1}{dt}$$

O bien:
$$-M\frac{d\xi_o}{dt} = m\frac{d\xi}{dt} = \frac{Mm}{(M+m)}\cdot\frac{dx_1}{dt}. \qquad \text{Por tanto} \qquad m' = \frac{Mm}{M+m}.$$

Así las ecuaciones $(J)'$ expresan el movimiento relativo de A con relación a C así como también el movimiento absoluto de una masa ficticia m' en A' atraída por un punto fijo D de masa $m' = M+m$.

Así $\quad m'\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{f(M+m)\,m'}{r^3}\,x_1 \quad$ O bien

$$(J)'' \qquad m'\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{fM'm'}{r^3}\,x_1 \quad \therefore \quad m'\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{fM'm'}{r^3}\,x_2 \quad \therefore \quad m'\frac{d^2x_3}{dt^2} = -\frac{fM'm'}{r_3}\,x_3$$

Las cantidades de movimiento proyectadas por la energía cinética del sistemo son:

$$(J)'' \qquad y_1 = m'\frac{dx_1}{dt} \qquad y_2 = m'\frac{dx_2}{dt} \qquad y_3 = m'\frac{dx_3}{dt}$$

$$T = \frac{m'}{2}\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2\right] = \frac{m'}{2}\left(\frac{y_1{}^2}{m'_2} + \frac{y_2{}^2}{m'^2} + \frac{y_3{}^2}{m'^2}\right) = \frac{1}{2m'}(y_1{}^2 + y_2{}^2 + y^2{}_3)$$

De donde $\quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = o. \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = o. \quad \frac{\partial T}{\partial x_3} = o. \quad \frac{dT}{dx'_1} = m'x'_1 = y_1 \quad \frac{dT}{dx'_2} = y_2 \quad \frac{dT}{dx'_3} = y^2{}_3$

$$\frac{dT}{dy_1} = \frac{dx_1}{dt} \qquad \frac{dT}{dy_2} = \frac{dx_2}{dt} \qquad \frac{dT}{dy_3} = \frac{dx_3}{dt}$$

Pongamos $\mu = fM'm'$ y sea U la función potencial, a saber:

$$U = +\int\left[\frac{fM'm'}{r^3}\,x_1\,dx_1 + \frac{fM'm'}{r^3}\,x_2\,dx_2 + \frac{fM'm'}{r^3}\,x_3\,dx_3\right] = +\mu\int\frac{x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3}{r^3} = +\mu\int\frac{rdr}{r^3} =$$

$$+\mu\int\frac{dr}{r^2} = -\mu\int d\frac{1}{r} = -\frac{\mu}{r}$$

Hagamos $F = T + U$. De donde:

$$m'\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{\partial T}{\partial x_1} - \frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{\partial F}{\partial x_1} \quad \therefore \quad \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial T}{\partial y_1} = \frac{\partial T}{\partial y_1} + \frac{\partial U}{\partial y_1} = \frac{\partial(T+U)}{\partial y_1}.$$

Por tanto, se tendrá el grupo de ecuaciones canónicas:

$$(I) \qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial F}{dy_1} \;\therefore\; \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_2} \;\therefore\; \frac{dx_3}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_3} \;\therefore\; \frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_1} \;\therefore\; \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_2} \;\therefore\; \frac{dy_3}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_3}$$

Como $\quad \frac{dF}{dt} = \sum\left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y_i}\cdot\frac{dy_i}{dt}\right] = \sum\left[\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{dy_i}{dt} - \frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{dy_i}{dt}\right] = o \quad$ se tendrá $F =$ constante, o bien:

$$\frac{1}{2m'}(y^2{}_1 + y^2{}_2 + y^2{}_3) - \frac{\mu}{r} = \mathscr{C}.$$

Supongamos que el eje $Dx(1.4.7)$ esté en el plano de la eclíptica, dirigido al ♉; que $Dx(2.5.8)$ esté dirigido al Este, a 90° de longitud; que el eje $Dx(3.6.9)$ esté dirigido al Sur (latitud sur +). Así tendremos para fórmulas de transformación:

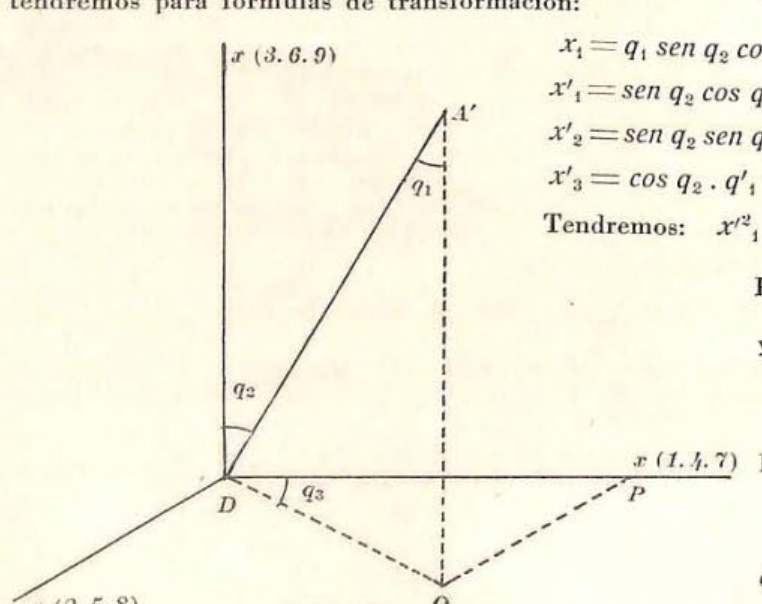

Figura 2a.

$$x_1 = q_1\,sen\,q_2\,cos\,q_3 \quad \therefore \quad x_2 = q_1\,sen\,q_2\,sen\,q_3 \quad \therefore \quad x_3 = q_1\,cos\,q_2$$

$$x'_1 = sen\,q_2\,cos\,q_3\,.\,q'_1 + q_1\,cos\,q_2\,cos\,q_3\,.\,q'_2 - q_1\,sen\,q_2\,sen\,q_3\,.\,q'_3$$

$$x'_2 = sen\,q_2\,sen\,q_3\,.\,q'_1 + q_1\,cos\,q_2\,sen\,q_3\,.\,q'_2 + q_1\,sen\,q_2\,cos\,q_3\,.\,q'_3$$

$$x'_3 = cos\,q_2\,.\,q'_1 - q_1\,sen\,q_2\,.\,q'_2.$$

Tendremos: $\quad x'^2{}_1 + x'^2{}_2 + x'^2{}_3 = q'^2{}_1 + q^2{}_1\,q'^2{}_2 + q^2{}_1\,sen^2\,q_2\,.\,q'^2{}_3.$

Por tanto la energía potencial del astro será: $-\frac{\mu}{q_1}$

y la cinética

$$T = \frac{m'}{2}(q'^2{}_1 + q'_1\,q'^2{}_2 + q'_1\,sen^2\,q_2\,.\,q'^2{}_3).$$

Pongamos, además:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q'_1} \qquad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q'_2} \qquad p_3 = \frac{\partial T}{\partial q'_3}$$

O bien:

$$p_1 = m'\,q'_1 \;\therefore\; p_2 = m'q^2{}_1\,q'_2 \;\therefore\; p_3 = m'\,q^2{}_1\,q'_3\,sen^2\,q_2$$

De donde: $\quad q'_1 = \frac{p_1}{m'} \qquad q'_2 = \frac{p_2}{m'\,q^2{}_1} \qquad q'_3 = \frac{p_3}{m'\,q^2{}_1\,sen^2\,q_2}. \quad$ Sustituyendo en T tendremos:

$$T = \frac{m'}{2}\left[\frac{p^2{}_1}{m'^2} + \frac{1}{q^2{}_1}\cdot\frac{p^2{}_2}{m'^2} + \frac{1}{q^2{}_1\,sen^2\,q_2}\cdot\frac{p^2{}_3}{m'^2}\right] = \frac{1}{2m'}\left[p^2{}_1 + \frac{1}{q^2{}_1}\,p^2{}_2 + \frac{1}{q^2{}_1\,sen^2\,q_2}\,p^2{}_3\right]$$

Y por tanto:

$$F = \frac{1}{2m'}\left[p^2{}_1 + \frac{1}{q^2{}_1}\,p^2{}_2 + \frac{1}{q^2{}_1\,sen^2\,q_2}\,p^2{}_3\right] - \frac{\mu}{q_1} = \mathscr{C}.$$

2° El cambio de variables es canónico. En efecto, se tiene:

$$(a) \qquad dx_1 = \sum\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\,dq_i \qquad dx_2 = \sum\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\,dq_i \qquad dx_3 = \sum\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\,dq_i.$$

$$(b) \qquad x'_1 = \sum\frac{\partial x_1}{\partial q'_i}\,q'_i \qquad x'_2 = \sum\frac{\partial x_2}{\partial q'_i}\,q'_i \qquad x'_3 = \sum\frac{\partial x_3}{\partial q'_i}\,q'_i.$$

$$(c) \quad dT = \sum\frac{\partial T}{\partial q'_i}\,dq'_i = \sum\frac{\partial T}{\partial x'_i}\,dx'_i \;\therefore\; (d) \quad dx'_1 = \sum\frac{\partial x_1}{\partial q'_i}dq'_i \therefore dx'_2 = \sum\frac{\partial x_2}{\partial q'_i}dq'_i \therefore dx'_3 = \sum\frac{\partial x_3}{\partial q'_i}\,dq'_i$$

Diferenciemos a T con relación a las q'_i dejando las q_i constantes. Como las x dependen de las q_1 y no de las q'_1 variarán las x' y las y'. Pero $\frac{\partial x_1}{\partial q_i} \therefore \frac{\partial x_2}{\partial q_i} \therefore \frac{\partial x_3}{\partial q_i}$ se conservarán intactas. Por tanto, se tendrán (c) y (d).

Pero de (c) se deduce que $\Sigma p_i dq'_i = \Sigma y_i dx'_i$. La comparación de (d) con (a) nos demuestra que las mismas relaciones que ligan a dx_1 dx_2 y dx_3 con dq_1 dq_2 y dq_3 son las mismas que ligan a dx'_1 dx'_2 y dx'_3 con dq'_1 dq'_2 y dq'_3 y que, en consecuencia de la igualdad $\Sigma p_i\,dq'_i = \Sigma y_i\,dx'_i$ se deduce $\Sigma p_i\,dx_i = \Sigma y_i\,dx_i$. Por tanto, se tendrá:

$$\Sigma qdp - \Sigma xdy = \Sigma qdp + \Sigma pdq - (\Sigma xdy + \Sigma ydx) = d(\Sigma pq - \Sigma xy).$$

Esta es una diferencial exacta y el cambio será canónico. Así, pues:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_1} \;\therefore\; \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_2} \;\therefore\; \frac{dq_3}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_3} \;\therefore\; \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_1} \;\therefore\; \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_2} \;\therefore\; \frac{dp_3}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_3}. \quad (I)$$

$F(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) = \mathscr{C} =$ constante. En estas ecuaciones canónicas: $\quad p_1 = \frac{\partial T}{\partial q'_1} \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q'_2} \quad p_3 = \frac{\partial T}{\partial q'_3}$

siendo $\quad F = T + U = \frac{1}{2m'}\left[p^2{}_1 + \frac{1}{q^2{}_1}\,p^2{}_2 + \frac{1}{q^2{}_1\,sen^2\,q_2}\,p^2{}_3\right] - \frac{fM'}{q_1} = \mathscr{C}.$

Pongamos $\quad \frac{\partial S}{\partial q_1} = p_1 \quad \frac{\partial S}{\partial q_2} = p_2 \quad \frac{\partial S}{\partial q_3} = p_3 \quad$ y tendremos:

$$F = \frac{1}{2m'}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{q^2{}_1}\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2 + \frac{1}{q^2{}_1\,sen^2\,q_2}\left(\frac{\partial S}{\partial q_3}\right)\right] - \frac{fM'}{q_1} = \mathscr{C}$$

Multiplicando la ecuación en S por $2m'$ y poniendo para simplificar: $\mu = fM'm'$ y $B = 2m'\mathscr{C}$ se tendrá:

$(II) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{q^2{}_1}\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2 + \frac{1}{q^2{}_1\,sen^2\,q_2}\left(\frac{\partial S}{\partial q_3}\right)^2 - \frac{2\mu}{q_1} = B. \quad$ Sea $\quad S = \varphi(q_1, q_2, q_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ una solución completa de (II), en donde β_1, β_2 y β_3 son las tres constantes de integración. Pongamos, además:

$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = \gamma_1 \quad \frac{\partial S}{\partial \beta_2} = \gamma_2 \quad \frac{\partial S}{\partial \beta_3} = \gamma_3 \quad$ Y como además se tiene: $\quad \frac{\partial S}{\partial q_1} = p_1 \quad \frac{\partial S}{\partial q_2} = p_2 \quad \frac{\partial S}{\partial q_3} = p_3$

se tendrán las ecuaciones suficientes para efectuar el cambio de las variables p y q por las β y γ Cambio que será canónico, puesto que $\quad dS = \Sigma p_j dq_j + \Sigma \gamma_k d\beta_k.$

De donde $\quad \Sigma\gamma\,d\beta - \Sigma qdp = dS - d(\Sigma p_j q_j) = d(S - \Sigma pq) =$ diferencial exacta. Por lo tanto se tendrá:

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \beta_1} \;\therefore\; \frac{d\gamma_2}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \beta_2} \;\therefore\; \frac{d\gamma_3}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \beta_3} \;\therefore\; \frac{\partial \beta_1}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \gamma_1} \;\therefore\; \frac{\partial \beta_2}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \gamma_2} \;\therefore\; \frac{\partial \beta_3}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \gamma_3} \qquad (I)'$$

2—Determinación de una solución completa de (II).

Principiemos por buscar tres funciones Q_1 Q_2 y Q_3 de q_1 q_2 y q_3 respectivamente, y tales que

$$S = Q_1 + Q_2 + Q_3 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial S}{\partial q_1} = Q'_1 \quad \therefore \quad \frac{\partial S}{\partial q_2} = Q'_2 \quad \therefore \quad \frac{\partial S}{\partial q_3} = Q'_3 \qquad (b)$$

Y pongamos $\quad Q'_3 = \beta_3 \qquad Q'^2{}_2 + \frac{\beta^2{}_3}{sen^2\,q_2} = \beta^2{}_2 \qquad Q'^2{}_1 + \frac{\beta^2{}_2}{q^2{}_1} - \frac{2\mu}{q_1} = B.$

Pero siendo B una constante arbitraria podemos hacerla igual, o mejor, función de la constante arbitraria β_1. Pongamos, pues, definitivamente $B = -\frac{A}{\beta_1^2}$. Así tendremos:

$$Q'_3 = \beta_3 \quad \therefore \quad Q'^2_1 + \frac{\beta_3^2}{sen^2\, q_2} = \beta_2^2 \quad \therefore \quad Q'^2_1 + \frac{\beta_2^2}{q_1^2} - \frac{2\mu}{q_1} = -\frac{A}{\beta_1^2} \tag{c}$$

Hallaremos, pues

$$\frac{dQ_3}{dq_2} = \beta_3 \quad \therefore \quad Q_3 = \beta_3 q_3 \quad \therefore \quad \frac{dQ_2}{dq_2} = \pm\sqrt{\beta_2^2 - \frac{\beta_3^2}{sen^2\, q_2}} \quad \therefore \quad Q_2 = \pm \int_{q_{0 \cdot 2}}^{q_2} \sqrt{\beta_2^2 - \frac{\beta_3^2}{sen^2\, q_2}}\, dq_2$$

$$\frac{dQ_1}{dq_1} = \pm\sqrt{\frac{2\mu}{q_1} - \frac{\beta_2^2}{q_1^2} - \frac{A}{\beta_1^2}} \quad \therefore \quad Q_1 = \pm \int_{q_{0 \cdot 1}}^{q_1} \sqrt{\frac{2\mu}{q_1} - \frac{\beta_2^2}{q_1^2} - \frac{A}{\beta_1^2}}\, dq_1$$

Podremos escoger indeferentemente el signo + o el −. Y en cuanto a los límites inferiores pueden escogerse de manera que la función se haga para ese valor $q_{0 \cdot 1}$ $q_{0 \cdot 2}$ $q_{0 \cdot 3}$ independiente de las constantes β_1 β_2 β_3 respectivamente, a fin de no tener que efectuar la cuadratura antes de derivar a S con relación a la constante respectiva. Se tendrá, pues:

$$S = \beta_3 q_3 \pm \int_{q_{0 \cdot 2}}^{q_2} \sqrt{\beta_2^2 - \frac{\beta_2^2}{sen^2\, q_2}} \cdot dq_2 \pm \int_{q_{0 \cdot 1}}^{q_1} \sqrt{\frac{2\mu}{q_1} - \frac{\beta_2^2}{q_1^2} - \frac{A}{\beta_1^2}} \cdot dq_1 \tag{III}$$

$$\Big\{ S = \beta_3 q_3 + \int_{q_{0 \cdot 2}}^{q_2} \sqrt{\beta_2^2 - \frac{\beta_2^2}{sen^2\, q_0}} \cdot dq + \int_{q_{0 \cdot 1}}^{q_1} \sqrt{\frac{2\mu}{q_1} - \frac{\beta_2^2}{q_1^2} - \frac{A}{\beta_1^2}} \cdot dq_1$$

Las fórmulas (a) nos darán:

$$\gamma_3 = \frac{\partial S}{\partial \beta_3} = q_3 \mp \int_{q_{0 \cdot 2}}^{q_2} \frac{\beta_3 \frac{dq_2}{sen^2\, q_2}}{\sqrt{\beta_2^2 - \frac{\beta_3^2}{sen^2\, q_2}}} = q_3 \pm \int_{q_{0 \cdot 2}}^{q_2} \frac{\beta_3\, d\, cot.\, q_2}{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_0^2 - \beta_0^2\, cot.^2\, q_2}} = q_3 \pm \int_{q_{0 \cdot 2}}^{q_2} \frac{d\left(\frac{\beta_3}{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_3^2}} \cdot cot.\, q_2\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_2}{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_3^2}}\, cot.\, q_2\right)^2}} =$$

$$= q_3 \pm \left\{ arc.\, sen\left(\frac{\beta_3}{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_3^2}}\, cot.\, q_2\right) - arc.\, sen\left(\frac{\beta_3}{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_3^2}}\, cot.\, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

Eligiendo el signo − en lugar del + tendremos, siendo $q_{0 \cdot 2} = \frac{\pi}{2}$: $\qquad \frac{\beta_3}{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_3^2}}\, cot.\, q_2 = sen\,(q_3 - \gamma_3)$. $\qquad (a)_1$

Pongamos: $\quad cotang.\, i = \frac{\beta_3}{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_3^2}}$. $\quad$ (i = inclinación de la órbita sobre el plano fundamental).

Es mejor, sin embargo, elegir el signo + en atención a que q_2 representa la distancia polar sur en vez de la distancia polar norte.

Pongamos $\quad q_2 - \frac{\pi}{2} = \lambda \quad$ De donde $\quad \gamma_3 = q_3 + \left\{ arc.\, sen\left(\frac{\beta_3}{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_3^2}}\, tang\,(-\lambda)\right) - arc.\left(\frac{\beta_3}{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_3^2}}\, tang\, o\right)\right\} =$

$$= q'_3 - arc.\, sen\left(\frac{\beta_3}{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_3^2}}\, tang\, \lambda\right)$$

Por tanto:

$$\begin{cases} \frac{\beta_3}{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_3^2}}\, tang\, \lambda = sen\,(q_3 - \gamma_3) \\ \frac{\beta_3}{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_3^2}} = cot.\, i \quad \therefore \quad tang\, \lambda = tang\, i\, sen\,(q_2 - \gamma_3) \end{cases} \tag{a}_1$$

De donde se deduce que la órbita es plana, que γ_3 representa el valor de q_3 para $q_2 = \frac{\pi}{2}$, o bien para $\lambda = o$.

Continuando la determinación de las nuevas variables γ tendremos:

$$\gamma_2 = \frac{\partial S}{\partial \beta_2} = \int_{q_{0\,2}}^{q_2} \frac{\beta_2\, dq_2}{\sqrt{\beta_2^2 - \frac{\beta_3^2}{sen^2\, q_2}}} - \int_{q_{0 \cdot 1}}^{q_1} \frac{\beta_2 \frac{dq_1}{q_1^2}}{\sqrt{\frac{2\mu}{q_1} - \frac{\beta_2^2}{q_2} - \frac{A}{\beta_1^2}}} = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int_{q_{0 \cdot 2}}^{q_2} \frac{\beta_2\, dq_2 .\, sen\, q_2}{\sqrt{\beta_2^2\, sen^2\, q_2 - \beta_3^2}} = \int_{q_{0 \cdot 2}}^{q_2} \frac{\beta_2 \cos \lambda\, d\lambda}{\sqrt{\beta_2^2 \cos^2 \lambda - \beta_3^2}} = \int_{q_{0 \cdot 2}}^{q_2} \frac{\beta_2\, d\, sen\, \lambda}{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_3^2 - \beta_2^2\, sen^2\, \lambda}}$$

O también:

$$I_1 = \int_{o}^{\lambda} \frac{d\, \frac{\beta_2\, sen\, \lambda}{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_3^2}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_2\, sen\, \lambda}{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_3^2}}\right)^2}} = arc.\, sen\left(\frac{\beta_2\, sen\, \lambda}{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_3^2}}\right) = \varphi.$$

$$I_2 = \int_{q_{0 \cdot 1}}^{q_1} \frac{d\left(+\frac{\beta_2}{q_1}\right)}{\sqrt{\frac{2\mu}{q_1} - \frac{\beta_2^2}{q_1^2} - \frac{A}{\beta_1^2}}} = + \int_{q_{0 \cdot 1}}^{q_1} \frac{d\, \frac{\beta_2}{q_1}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{\beta_2^2} - \frac{A}{\beta_1^2} - \left(\frac{\beta_2}{q_1} - \frac{\mu}{\beta_2}\right)^2}}$$

O bien:

$$I_2 = + \int_{q_{0 \cdot 1}}^{q_1} \frac{d\left(\frac{\beta_2}{q_1} - \frac{\mu}{\beta_2}\right)}{\sqrt{\frac{\mu^2}{\beta_2^2} - \frac{A}{\beta_1^2}}\sqrt{1 - \left(\frac{\frac{\beta_2}{q_1} - \frac{\mu}{\beta_2}}{\sqrt{R}}\right)^2}} = - \int_{q_{0 \cdot 1}}^{q_1} d\, arc.\, \cos \left(\frac{\frac{\beta_2}{q_1} - \frac{\mu}{\beta_2}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{\beta_2^2} - \frac{A}{\beta_1^2}}}\right)^2 = -(\theta - \theta_0)$$

$$\cos \theta = \frac{\frac{\beta_2}{q_1} - \frac{\mu}{\beta'_2}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{\beta_2^4} - \frac{A}{\beta_1^2}}} \quad \therefore \quad = q_1 \frac{\frac{\beta_2^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 - \frac{A\beta_2^2}{\mu \beta_1^2}} \cdot \cos \theta} \quad \therefore \quad sen\, \varphi = \frac{\beta_3\, sen\, \lambda}{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_3^2}} = \frac{sen\, \lambda}{\sqrt{1 - \frac{\beta_3^2}{\beta_2^2}}} = \frac{sen\, \lambda}{sen\, i} \therefore q_{0 \cdot 1}(\cos \theta_0)$$

$sen\, \lambda = sen\, i\, sen\, \varphi \qquad \gamma_2 = \varphi - (\theta - \theta_0).$

$MN = \varphi \qquad MP = \theta - \theta_0$

$$\frac{sen\, MN}{sen\, A} = \frac{sen\, MA}{sen\, i} \qquad \frac{sen\, \varphi}{1} = \frac{sen\, \lambda}{sen\, i}$$

$sen\, \lambda = sen\, i\, sen\, \varphi.$

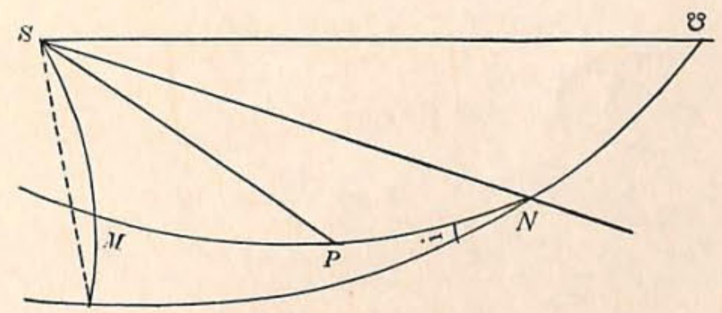

Figura 3a.

$$S = \beta_2\, q_3 + \int_{q_{0 \cdot 2}}^{q_2} \sqrt{\beta_2^2 - \frac{\beta_2^2}{sen^2\, q_2}}\, dq_2 + \int_{q_{0 \cdot 1}}^{q_1} \sqrt{\frac{2\mu}{q_1} - \frac{\beta_2^2}{q_1^2} - \frac{A}{\beta_1^2}}\, dq_1 \tag{III}$$

Derivando a S con relación a β_1 se tendrá:

$$\gamma_1 = \frac{\partial S}{\partial \beta_1} = \int_{q_{0 \cdot 1}}^{q_1} \frac{\frac{A}{\beta_1^3}\, dq_1}{\sqrt{\frac{2\mu}{q_1} - \frac{\beta_2^2}{q_1^2} - \frac{A}{\beta_1^2}}} = \frac{A}{\beta_1^2} \int_{q_{0 \cdot 1}}^{q_1} \frac{q_1\, dq_1}{\sqrt{2\mu q_1 - \frac{A}{\beta_1^2}\, q_1^2 - \beta_2^2}}$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial S}{\partial \beta_1} = \int_{q_{0 \cdot 1}}^{q_1} \frac{\frac{A}{\beta_1^3}\, dq_1}{\sqrt{\frac{2\mu}{q_1} - \frac{\beta_2^2}{q_1^2} - \frac{A}{\beta_1^2}}} = \int_{q_{0 \cdot 1}}^{q_1} \frac{\frac{A}{\beta_1^3}\, q_1\, dq_1}{\sqrt{2\mu q_1 - \frac{A}{\beta_1^2}\, q_1^2 - \beta^2}} = \int_{q_{0 \cdot 1}}^{q_1} \frac{\frac{A}{\beta_1^3}\, q_1\, dq_1}{\sqrt{\frac{\mu^2 \beta_1^2}{A} - \beta_2^2 - \left(\frac{\mu \beta_1}{\sqrt{A}} - \frac{\sqrt{A}}{\beta_1}\, q_1\right)^2}}.$$

Pongamos:

$$\omega = \frac{\mu\beta_1}{\sqrt{A}} - \frac{\sqrt{A}}{\beta_1} q_1 \quad \therefore \quad d\omega = -\frac{\sqrt{A}}{\beta_1} dq_1 \quad \therefore \quad \frac{\sqrt{A}}{\beta_1} q_1 = \frac{\mu\beta_1}{\sqrt{A}} - \omega \quad \therefore \quad dq_1 = -\frac{\beta_1}{\sqrt{A}} d\omega$$

$$q_1\, dq = \left(-\mu + \frac{\beta_1}{\sqrt{A}}\omega\right) d\omega = \left(\frac{\beta_1}{\sqrt{A}}\omega - \mu\right) d\omega \quad \therefore \quad \alpha^2 = \frac{\mu^2\beta^2_1}{A} - \beta^2_2$$

De donde:
$$\gamma_1 = \int_{q_{0\cdot 1}}^{q_1} \frac{\frac{A}{\beta^3_1}\left(\frac{A}{\sqrt{A}}\omega - \mu\right) d\omega}{\sqrt{\frac{\mu^2\beta^2_1}{A} - \beta^2_2 - \omega^2}} = \int_{q_{0\cdot 1}}^{q_1} \frac{\frac{1}{\beta_1}\left(\frac{\sqrt{A}}{\beta_1}\omega - \frac{\mu A}{\beta^3_1}\right) d\omega}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}} = \frac{\sqrt{A}}{\beta^2_1}\int_{q_{0\cdot 1}}^{q_1} \frac{\omega d\omega}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}} - \frac{\mu A}{\beta^3_1}\int_{q_{0\cdot 1}}^{q_1} \frac{d\omega}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{A}}{\beta^2_1}\left(\sqrt{\alpha^2 - \omega^2_0} - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}\right) - \frac{\mu A}{\beta^2_1} arc.\, sen \frac{\omega}{\alpha}.$$ Pongamos $\varphi = arc.\, sen \frac{\omega}{\alpha}$ y tengamos:

$$\frac{\omega}{\alpha} = sen\, \varphi = \frac{\mu\beta_1}{\alpha\sqrt{A}} - \frac{\sqrt{A}}{\alpha\beta_1} q_1.$$ De donde $$q_1 = \frac{\mu\beta^2_1}{A} - \frac{\beta_1}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{\mu^2\beta^2_1}{A} - \beta^2_2}.\, sen\, \varphi = \frac{\mu\beta^2_1}{A}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{A\beta^2_2}{\mu^2\beta_1^2}}.\, sen\, \varphi\right)$$

Mejor aún, y para estar de acuerdo con las fórmulas ordinarias, pondremos:

$$\frac{\omega}{\alpha} = sen\, \varphi = sen\left(\frac{\pi}{2} \mp u\right) = cos \pm u.$$

De donde $$q_1 = \frac{\mu\beta^2_1}{A} - \frac{\beta_1}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{\mu^2\beta^2_1}{A} - \beta^2_2} \cdot cos\, u = \frac{\mu\beta^2_1}{A}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{A\beta^2_2}{\mu^2\beta^2_1}} \cdot cos\, u\right).$$

Así u es igual a la anomalía excéntrica. Además, para $\omega_o = \alpha$ se tendrá: $u = o \pm 2k\pi$ Por tanto:

$$q_{0\cdot 1} = \frac{\mu\beta^2_1}{A} - \frac{\beta_1}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{\mu^2\beta^2_1}{A} - \beta^2_2} = \frac{\mu\beta^2_1}{A} - \frac{\beta_1\alpha}{\sqrt{A}} = \frac{\mu\beta^2_1}{A}\left(1 - \frac{\alpha\sqrt{A}}{\mu\beta_1}\right).$$ Así $a = \frac{\mu\beta^2_1}{A}$ $\qquad e = \frac{\alpha\sqrt{A}}{\mu\beta_1} = \sqrt{1 - \frac{A\beta^2_2}{\mu^2\beta^2_1}}$

Se tendrá, pues,

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{A}}{\beta^2_1}\left(\sqrt{\alpha^2 - \omega^2_0} - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}\right) - \frac{\mu A}{\beta^3_1} arc.\, cos \frac{\omega}{\alpha} = -\frac{\alpha\sqrt{A}}{\beta^2_1} sen\, u \mp \frac{\mu A}{\beta^2_1} \cdot u = \frac{\mu A}{\beta^3_1}\left(u - \frac{\alpha\beta_1}{\mu\sqrt{A}} \cdot sen\, u\right)$$

en donde hemos elegido el signo $+$. Así $\gamma_1 = \frac{\mu A}{\beta^3_1}\left(u - \frac{\alpha\beta_1}{\mu\sqrt{A}} \cdot sen\, u\right).$

Pero $$\gamma_1 = \frac{\partial S}{\partial \beta_1} = \frac{\mu A}{\beta^3_1}\left(u - \frac{\alpha\beta_1}{\mu\sqrt{A}} \cdot sen\, u\right) \quad \therefore \quad \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \beta_1} = \frac{2A}{\beta^3_1} \quad \therefore \quad \gamma_1 = \frac{2A}{\beta^3_1}(t - E)$$

O bien: $$\frac{2A}{\beta^3_1}(t - E) = \frac{\mu A}{\beta^3_1}\left(u - \frac{\alpha\beta_1}{\mu\sqrt{A}}.\, sen\, u\right).$$

Tenemos: $$\gamma_2 = \varphi - arc.\, cos \frac{\frac{\beta_2}{q_1} - \frac{\mu}{\beta_2}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{\beta^2_2} - \frac{A}{\beta^2_1}}}$$
$$\gamma_2 = \varphi - \theta$$

Sea	$A = o$	Parábola	Siendo
,,	$A > o$	Elipse	$sen\, \varphi = \frac{sen\, \lambda}{sen\, i}$
,,	$A < o.$	Hipérbola	$\varphi_0 = \Omega - \theta_0$

ACCION DE LA TEMPERATURA SOBRE LA CONTRACTIBILIDAD INTESTINAL

PROF. ALFONSO ESGUERRA GOMEZ
LUIS M. BORRERO H.
GONZALO MONTES
(Laboratorio de Fisiología de la Facultad de Medicina)

La costumbre y quizá la facilidad para aplicar frío o calor sobre la pared abdominal, han consagrado el uso de bolsas calientes, fomentos o bolsas de hielo en el tratamiento de muchas afecciones gastrointestinales y, aún más, en muchos casos se hacen estas aplicaciones sin tener un diagnóstico cierto. Además, con fines semejantes se administran bebidas calientes o heladas. En los servicios quirúrgicos existe la impresión clínica de que el calor aplicado a la pared abdominal estimula el peristaltismo, y por esto lo usan en casos de ileus paralíticos. En cambio, en los servicios médicos se ha observado que la aplicación de bolsas calientes a veces alivia a los pacientes de cólico intestinal, lo cual sugiere que tales aplicaciones tengan efecto sedante sobre los espasmos del intestino. Orr (1) da una idea del estado de la cuestión cuando, refiriéndose a la aplicación de calor en la obstrucción intestinal, afirma que "como no se ha observado que haga daño, se puede recomendar su uso".

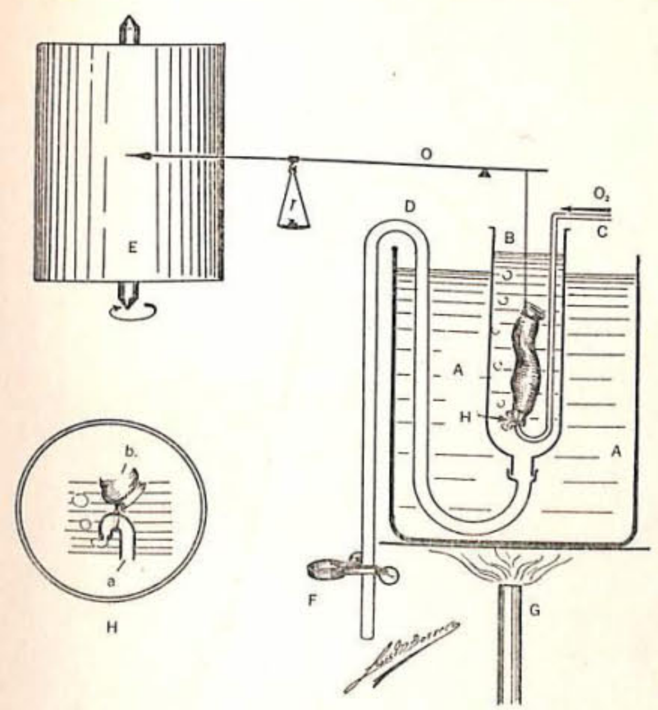

FIGURA 1

En la literatura médica existen algunos trabajos experimentales sobre la aplicación de calor o frío en el abdomen de pacientes con fístulas intestinales, a quienes se introducían baloncitos conectados a tambores de Marey para el registro de los movimientos del intestino; también se han publicado experiencias practicadas en forma semejante en individuos normales, mediante la introducción oral de tubos de Müller-Abbot con un baloncito en su extremidad, el cual se hacía llegar hasta el intestino. Sin embargo, los resultados obtenidos por los diferentes autores son contradictorios (1, 2, 3, 4, 5).

En los Servicios de Maternidad del Hospital de San Juan de Dios de Bogotá, se aplica hielo sobre el abdomen de las madres en los primeros días del puerperio, y con gran frecuencia se observa constipación en estas pacientes. ¿No tendrá esto algo qué ver con el enfriamiento del abdomen?

Estas divergencias no deben sorprendernos puesto que normalmente la movilidad gastro-intestinal varía mucho de minuto a minuto, al propio tiempo que es muy sensible a influencias tales como las emociones, reflejos condicionados, vista, gusto, olfato, sueño, fatiga, hambre o ingestión de alimentos.

El objeto de nuestro estudio ha sido examinar experimentalmente la validez de los conceptos emitidos hasta hoy a este respecto. Lo dividimos en dos partes: 1º Influencia de la temperatura sobre la fibra lisa intestinal, en el órgano aislado, y 2º Influencia de la temperatura sobre el intestino de perros normales, es decir, sometido a las influencias extrínsecas reflejas que puedan afectarlo.

INFLUENCIA DE LA TEMPERATURA SOBRE EL INTESTINO AISLADO DEL CONEJO.

METODO: Se colocaba un fragmento de intestino, de unos tres centímetros de longitud, en baño de solución "Tirode" y éste, a su vez, se sumergía en un depósito de agua cuya temperatura se podía variar a voluntad. El intestino quedaba fijo por una extremidad al fondo del baño, y por la otra se conectaba a una palanca inscriptora para el registro de las contracciones. La solución de "Tirode" se oxigenaba haciendo burbujear a través de ella una corriente de oxígeno. El diagrama de la Figura 1ª muestra este dispositivo. En la palanca inscriptora era necesario colocar un contrapeso adecuado. Variábase lentamente el calor y sólo se registraban las contracciones cuando se había alcanzado el grado de temperatura que se deseaba.

Se utilizaron fragmentos de intestino de diez conejos diferentes y todos los resultados fueron uniformes.