

# ENTRETENIMIENTOS MATEMÁTICOS

JULIO GARAVITO A.

Director del Observatorio Astronómico Nacional de 1892 a 1919

## OSCILACION DE UNA BARRA PRISMÁTICA SOBRE UN CILINDRO RECTO DE BASE CIRCULAR

Suponemos que el plano de oscilación es normal al cilindro, que el eje del cilindro es horizontal y que la posición de equilibrio de la barra sobre el cilindro sea la posición horizontal. (Véase la figura)

Tomemos el plano que pasa por el centro de gravedad de la barra normalmente al eje del cilindro, por plano coordenado de las  $xy$ ; por eje de las  $x$  la tangente horizontal a la sección circular del cilindro; por eje de las  $y$  la vertical hacia arriba y por eje  $Oz$  la generatriz horizontal. Como la oscilación se verifica normalmente al eje de las  $z$  las coordenadas de ese nombre referentes a todos los puntos de la barra son constantes y son nulas las componentes de las fuerzas en esa dirección. Por tanto, se tendrá para todos los puntos de la barra:  $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$  y  $Z = 0$  Y la ecuación de d'Alambert toma la forma referente a dos coordenadas  $x$  e  $y$ .

$$(1) \quad \sum m \left( \frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y \right) = \sum (X \delta x + Y \delta y)$$

en la cual  $\delta x$  y  $\delta y$  representan desalojamientos compatibles con los ligamentos y  $X$  e  $Y$  las fuerzas distintas de la reacción del cilindro.

Despreciando la deformación del cilindro y de la barra y la resistencia del aire, se tendrá  $X = 0$  y  $Y = -mg$ . Tendremos:

$$(2) \quad \sum m \left[ \frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \left( \frac{d^2y}{dt^2} + g \right) \delta y \right] = 0$$

Sea  $G(x_0, y_0)$  la posición del centro de gravedad de la barra en un instante dado, y sean  $Gx'$  y  $Gy'$  ejes paralelos a los ejes fijos trazados por el centro  $G$  de gravedad. Se tendrá:  $x = x_0 + x'$   $y = y_0 + y'$

De donde,  $\frac{d^2x}{dt^2} \delta x = \left( \frac{d^2x_0}{dt^2} + \frac{d^2x'}{dt^2} \right) (\delta x_0 + \delta x')$   $\therefore \frac{d^2y}{dt^2} \delta y = \left( \frac{d^2y_0}{dt^2} + \frac{d^2y'}{dt^2} \right) (\delta y_0 + \delta y')$

Por tanto:  $\sum m \left( \frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y \right) = \sum m \left( \frac{d^2x_0}{dt^2} \delta x_0 + \frac{d^2y_0}{dt^2} \delta y_0 + \frac{d^2x_0}{dt^2} \delta x' + \frac{d^2y_0}{dt^2} \delta y' + \frac{d^2x'}{dt^2} \delta x_0 + \frac{d^2y'}{dt^2} \delta y_0 + \frac{d^2x'}{dt^2} \delta x' + \frac{d^2y'}{dt^2} \delta y' \right)$  Y como  $\sum mx' = 0$   $\sum my' = 0$

se tendrá:  $\sum m \left( \frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y \right) = \sum m \left( \frac{d^2x_0}{dt^2} \delta x_0 + \frac{d^2y_0}{dt^2} \delta y_0 \right) + \sum m \left( \frac{d^2x'}{dt^2} \delta x' + \frac{d^2y'}{dt^2} \delta y' \right) = M \left( \frac{d^2x_0}{dt^2} \delta x_0 + \frac{d^2y_0}{dt^2} \delta y_0 \right) + \sum m \left( \frac{d^2x'}{dt^2} \delta x' + \frac{d^2y'}{dt^2} \delta y' \right)$ .

Por tanto la ecuación de movimiento es

$$(3) \quad M \left[ \frac{d^2x_0}{dt^2} \delta x_0 + \left( \frac{d^2y_0}{dt^2} + g \right) \delta y_0 \right] + \sum m \left( \frac{d^2x'}{dt^2} \delta x' + \frac{d^2y'}{dt^2} \delta y' \right) = 0$$

Tomando un nuevo sistema de ejes móvil pero ligado invariablemente a la barra, cuyo origen sea el centro de gravedad, y tal que en la posición horizontal de ésta coincida con la correspondiente de  $x'$   $Gy'$  se tendrá para una inclinación  $l$ :

$$x' = \xi \cos l + \eta \sin l \quad y' = -\xi \sin l + \eta \cos l$$

en las cuales  $\xi$  y  $\eta$  son constantes para cada punto de la barra.

Tendremos:  $\frac{dx'}{dt} = -\xi \sin l \frac{dl}{dt} + \eta \cos l \frac{dl}{dt} = y' \frac{dl}{dt}$   $\therefore \frac{d^2x'}{dt^2} = y' \frac{d^2l}{dt^2} + \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dl}{dt}$

$$\frac{dy'}{dt} = -\xi \cos l \frac{dl}{dt} - \eta \sin l \frac{dl}{dt} = -x' \frac{dl}{dt} \therefore \frac{d^2y'}{dt^2} = -x' \frac{d^2l}{dt^2} - \frac{dx'}{dt} \cdot \frac{dl}{dt}$$

De donde:  $\frac{d^2x'}{dt^2} = y' \frac{d^2l}{dt^2} - x' \left( \frac{dl}{dt} \right)^2$   $\therefore \frac{d^2y'}{dt^2} = -x' \frac{d^2l}{dt^2} - y' \left( \frac{dl}{dt} \right)^2$

Además:  $\delta x' = y' \delta l$   $\delta y' = -x' \delta l$

Por tanto:  $\frac{d^2x'}{dt^2} \delta x' + \frac{d^2y'}{dt^2} \delta y' = \left[ y' \frac{d^2l}{dt^2} - x' \left( \frac{dl}{dt} \right)^2 \right] y' \delta l + \left[ x' \frac{d^2l}{dt^2} + y' \left( \frac{dl}{dt} \right)^2 \right] x' \delta l = [y'^2 + x'^2] \frac{d^2l}{dt^2} \delta l$

O bien:  $\sum m \left( \frac{d^2x'}{dt^2} \delta x' + \frac{d^2y'}{dt^2} \delta y' \right) = I_0 \frac{d^2l}{dt^2} \delta l = M \rho^2 \frac{d^2l}{dt^2} \delta l$

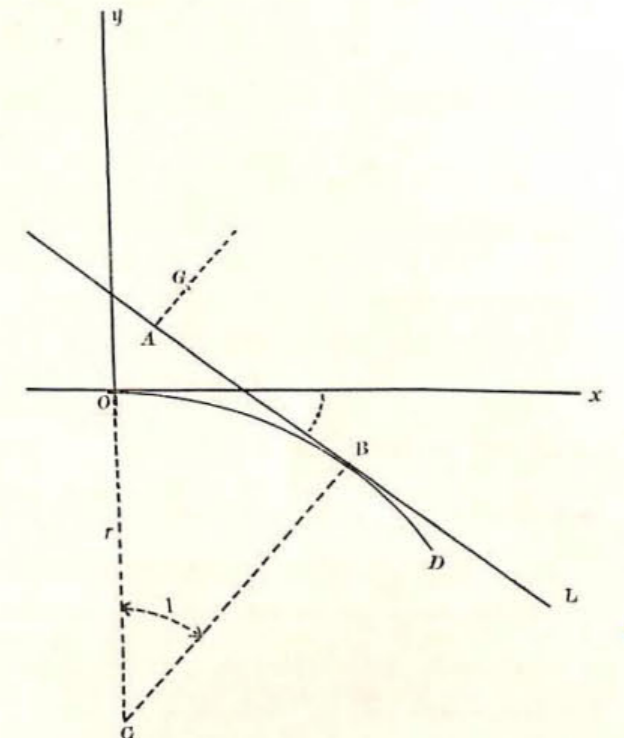
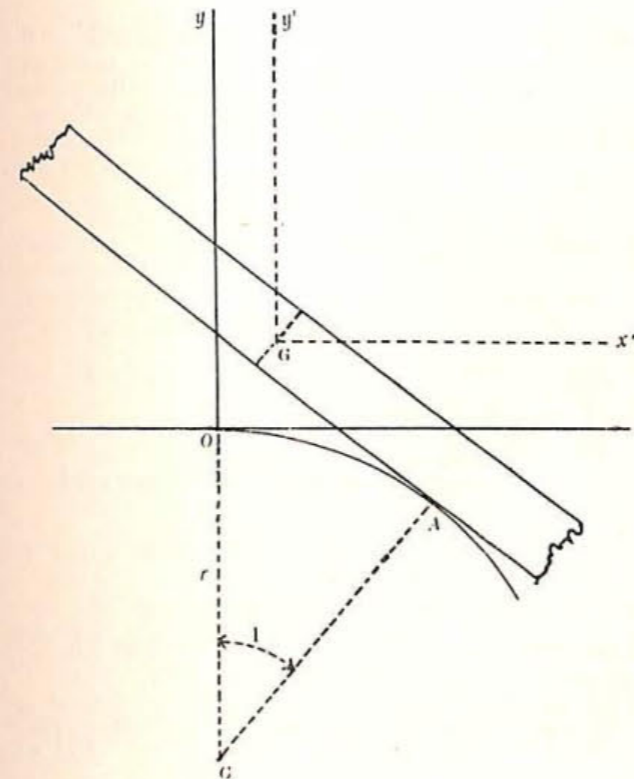
Por tanto:  $M \rho^2 \frac{d^2l}{dt^2} \delta l + M \left[ \frac{d^2x_0}{dt^2} \delta x_0 + \left( \frac{d^2y_0}{dt^2} + g \right) \delta y_0 \right] = 0$

O bien: (4)  $\rho^2 \frac{d^2l}{dt^2} \delta l + \left[ \frac{d^2x_0}{dt^2} \delta x_0 + \left( \frac{d^2y_0}{dt^2} + g \right) \delta y_0 \right] = 0$

Sea  $ABL$  la posición de la arista inferior de la barra en una posición cualquiera;  $OBD$  la sección recta del cilindro. Sea  $G$  el centro de gravedad de la barra,  $A$  el punto de la barra que corresponde a  $O$  en la posición horizontal de ésta. Sea  $GA = a$   $OB = rl = AB$  y el ángulo  $(AL, Ox) = (GA, Oy) = l$

Se tendrá:  $x_0 = x_B - rl \cos l + a \sin l$   $y_0 = y_B + rl \sin l + a \cos l$  Pero  $x_B = r \sin l$   $y_B = -(1 - \cos l)r$

Por tanto,  $x_0 = (r + a) \sin l - rl \cos l$   $y_0 = -r + (r + a) \cos l + rl \sin l$



De donde:  $\frac{dx_0}{dt} = [a \cos l + rl \sin l] \frac{dl}{dt}$   $\delta x_0 = [a \cos l + rl \sin l] \delta l$

$\frac{dy_0}{dt} = [rl \cos l - a \sin l] \frac{dl}{dt}$   $\delta y_0 = [rl \cos l - a \sin l] \delta l$

Y también,  $\frac{d^2x_0}{dt^2} = [a \cos l + rl \sin l] \frac{d^2l}{dt^2} + [(r - a) \sin l + rl \cos l] \left( \frac{dl}{dt} \right)^2$

$\frac{d^2y_0}{dt^2} = [rl \cos l - a \sin l] \frac{d^2l}{dt^2} + [(r - a) \cos l - rl \sin l] \left( \frac{dl}{dt} \right)^2$

De donde:  $\frac{d^2x_0}{dt^2} \delta x_0 + \frac{d^2y_0}{dt^2} \delta y_0 = \delta l \left[ (a \cos l + rl \sin l)^2 + (rl \cos l - a \sin l)^2 \right] \frac{d^2l}{dt^2} + \left( \frac{dl}{dt} \right)^2 [ (a \cos l + rl \sin l) [(r - a) \sin l + rl \cos l] + (rl \cos l - a \sin l) [(r - a) \cos l - rl \sin l] ] = \left[ a^2 + r^2 \right] \frac{d^2l}{dt^2} + [ a(r - a) \sin l \cos l + ral \cos^2 l + r(r - a) l \sin^2 l + r^2 l \sin l \cos l + r(r - a) l \cos^2 l - r^2 l \sin l \cos l - (r - a) \sin l \cos l + arl \sin^2 l ] \left( \frac{dl}{dt} \right)^2 \delta l =$

$$= \left[ a^2 + r^2 l^2 \right] \frac{d^2 l}{dt^2} + [arl + r(r-a)l] \left( \frac{dl}{dt} \right)^2 \delta l = \left[ a^2 + r^2 l^2 \right] \frac{d^2 l}{dt^2} + r^2 l \left( \frac{dl}{dt} \right)^2 \delta l.$$

Sustituyendo en (4) y suprimiendo el factor común  $\delta l$  tendremos:

$$(5) \quad (\rho^2 + a^2 + r^2 l^2) \frac{d^2 l}{dt^2} + r^2 l \left( \frac{dl}{dt} \right)^2 + g [rl \cos l - a \operatorname{sen} l] = 0$$

Hagamos  $P = \rho^2 + a^2 + r^2 l^2$   $\therefore Q = r^2 l$   $\therefore R = g [rl \cos l - a \operatorname{sen} l]$ . Tendremos:  $P \frac{d^2 l}{dt^2} + Q \left( \frac{dl}{dt} \right)^2 + R = 0$

Poniendo  $y = \left( \frac{dl}{dt} \right)^2 = l'^2$  se tendrá:  $\frac{dy}{dl} = 2 \frac{dl'}{dl} \cdot l' = 2 \frac{dl'}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = 2 \frac{dl'}{dt} = 2 \frac{d^2 l}{dt^2}$

La ecuación tomará la forma lineal:

$$(5)' \quad P \frac{dy}{dl} + 2Qy + 2R = 0. \quad \text{Para integrarla haremos } y = xz.$$

De donde,  $Px \frac{dz}{dl} + Pz \frac{dx}{dl} + 2Qxz + 2R = 0$  Y por tanto:  $\left( P \frac{dz}{dl} + 2Qz \right) x + Pz \frac{dx}{dl} + 2R = 0.$

Determinemos a  $z$  por la condición de hacer nulo el coeficiente de  $x$ . Así tendremos:

$$P \frac{dz}{dl} + 2Qz = 0 \quad \frac{dz}{z} + \frac{2Q}{P} dl = 0 \quad \text{Pero } 2Q dl = dP$$

Por tanto:  $\frac{dz}{z} + \frac{dP}{P} = dlz + dlP = dlPz = 0 \quad lPz = c \quad Pz = c_1$

Tendremos, pues,  $c_1 dx + 2R dl = 0$  O sea  $c_1 x + 2gr \int l \cos l dl + 2ga \cos l = c_2$

Y como  $\int l \cos l dl = \int l d \operatorname{sen} l = l \operatorname{sen} l - \int \operatorname{sen} l dl = l \operatorname{sen} l + \cos l$

se tendrá, notando que  $c_1 = Pz$  y que  $xz = y$ :  $Py + 2grl \operatorname{sen} l + 2gr \cos l + 2ga \cos l = c_2$

O bien  $y = \frac{c_2 - 2g [rl \operatorname{sen} l + (r+a) \cos l]}{P}$ .

Llamemos  $l_1$  el valor de  $l$  que anula a  $y$ . Se tendrá:  $c_2 = 2g [rl_1 \operatorname{sen} l_1 + (r+a) \cos l_1]$

Y sustituyendo en  $y$  tendremos: (6)  $y = \frac{2g [r (l_1 \operatorname{sen} l_1 - l \operatorname{sen} l) + (r+a) (\cos l_1 - \cos l)]}{\rho^2 + a^2 + r^2 l^2} = \left( \frac{dl}{dt} \right)^2$

Desarrollando el numerador por las potencias crecientes de  $l$  tendremos:

$$l_1 \operatorname{sen} l_1 = l_1 \left( l_1 - \frac{l_1^3}{1.2.3} + \dots \right) = l_1^2 - \frac{l_1^4}{1.2.3} + \dots \quad \therefore \quad l \operatorname{sen} l = l \left( l - \frac{l^3}{1.2.3} + \dots \right) = l^2 - \frac{l^4}{1.2.3} + \dots$$

Así pues,  $r (l_1 \operatorname{sen} l_1 - l \operatorname{sen} l) = r \left[ l_1^2 - l^2 - \frac{1}{6} (l_1^4 - l^4) + \dots \right]$

$$(r+a) (\cos l_1 - \cos l) = (r+a) \left[ 1 - \frac{l_1^2}{2} + \frac{l_1^4}{24} - \dots - 1 + \frac{l^2}{2} - \frac{l^4}{24} + \dots \right]$$

$$= -(r+a) \left[ \frac{1}{2} (l_1^2 - l^2) - \frac{1}{24} (l_1^4 - l^4) + \dots \right]$$

Despreciando las cuartas potencias de  $l$  se tendrá:

$$\left( \frac{dl}{dt} \right)^2 = \frac{2g \left[ \frac{1}{2} (r-a) (l_1^2 - l^2) + \dots \right] \left( 1 + \frac{r^2 l^2}{\rho^2 + a^2} \right)^{-1}}{\rho^2 + a^2} \quad \therefore \quad \left( \frac{dl}{dt} \right)^2 = \frac{g(r-a)}{\rho^2 + a^2} (l_1^2 - l^2). \quad (6)'$$

Antes de continuar notaremos que  $\left( \frac{dl}{dt} \right)^2$  se anula para  $l = \pm l_1$ . Esto no solamente en la fórmula reducida (6)', sino en su valor exacto (6).

Despejando a  $dt$  se tendrá:  $dt = \pm \sqrt{\frac{\rho^2 + a^2}{g(r-a)}} \cdot \frac{dl}{\sqrt{l_1^2 - l^2}} = \pm \sqrt{\frac{\rho^2 + a^2}{g(r-a)}} \cdot \frac{d \left( \frac{l}{l_1} \right)}{\sqrt{1 - \left( \frac{l}{l_1} \right)^2}}$

O bien:  $dt = \mp \sqrt{\frac{\rho^2 + a^2}{g(r-a)}} \cdot d \left( \operatorname{arc.} \cos \frac{l}{l_1} \right).$

Llamando  $T$  la duración de una oscilación, tendremos integrando de  $-l_1$  a  $+l_1$  y escogiendo el signo (-), puesto que el coseno decrece cuando el arco crece:

$$T = - \sqrt{\frac{\rho^2 + a^2}{g(r-a)}} \left[ \operatorname{arc.} \cos (1) - \operatorname{arc.} \cos (-1) \right]. \quad \text{O sea} \quad (7) \quad T = \pi \sqrt{\frac{\rho^2 + a^2}{g(r-a)}}.$$

*EXPERIENCIAS.*—Se han efectuado varias experiencias para comprobar la solución que se acaba de encontrar, con reglas de sección rectangular. La anchura de la barra o regla en el sentido de las generatrices del cilindro no importa al problema, puesto que teóricamente se hace caso omiso de la resistencia del aire. Pero, para la efectividad de las experiencias conviene que esta resistencia sea lo menos posible: por eso se han empleado reglas delgadas, es decir, cuya anchura en el sentido de dichas generatrices, sea pequeña.

Poniendo: longitud de la barra =  $2l = L$ ; espesor de la misma en el plano de oscilación =  $2a = A$ ; radio del cilindro =  $r$ , y llamando  $I$  el momento de inercia con relación al eje paralelo a las generatrices del cilindro, se tendrá:  $\rho^2 = \frac{1}{3} (l^2 + a^2)$ . Esto después de ejecutadas las operaciones consiguientes, que se omiten por brevedad, y considerando que el área del rectángulo correspondiente a la sección de la barra en el plano de oscilación, es  $S = 4al$ .

De aquí se saca que  $\rho^2 + a^2 = \frac{1}{3} (l^2 + 4a^2)$ . Sustituyendo en la expresión (7) se

halla:  $T = \pi \sqrt{\frac{l^2 + 4a^2}{3g(r-a)}}.$  (8)

#### APLICACION DE LA FORMULA ANTERIOR (8).

1a. *Experiencia.* — Cilindro de radio  $r = 0.0375$  m. — barra de longitud  $L = 2l = 0.600$  m. y de espesor  $A = 2a = 0.006$  m.

El cálculo, según la fórmula (8), da para la duración de una oscilación simple:  $T_c = 0^s.937$ . La experiencia, en tres series de observaciones con medida de la duración de la doble oscilación, cinco veces en cada serie, dió:  $T_o = 0^s.943$ . La diferencia  $T_o - T_c = 0^s.006$  es del orden de los errores de observación.

2a. *Experiencia.* — Cilindro de radio  $r = 0.08435$  m. — regla de longitud  $L = 2l = 0.967$  m. y de espesor  $A = 2a = 0.019$  m.

El cálculo da para la duración de una oscilación simple:  $T_c = 1^s.033$ . La experiencia, con la observación de diez oscilaciones dobles, dió:  $T_o = 1^s.012$ . La diferencia  $T_c - T_o = 0^s.021$  alcanza al doble del error medio.

3a. *Experiencia.* — Cilindro del mismo radio — regla de longitud  $L = 2l = 0.600$  m. y de espesor  $A = 2a = 0.005$  m.

El cálculo da:  $T_c = 0^s.608$ . La observación dió:  $T_o = 0^s.604$ . La diferencia  $T_c - T_o = 0^s.004$ , alcanza al doble del error medio.

4a. *Experiencia.* — Cilindro del mismo radio — regla de longitud  $L = 2l = 0.509$  m. y de espesor  $A = 2a = 0.0035$  m.

$T_c = 0^s.514$ .  $T_o = 0^s.508$ .  $T_c - T_o = 0^s.006$ . En casi todas las experiencias se ha obtenido:  $T_c > T_o$ , siendo la diferencia mayor que el error medio.

