EQUILIBRIO DE LOS MACIZOS PULVERULENTOS

JULIO GARAVITO A.
Director del Observatorio Astronómico Nacional, de 1892 a 1919

PLANEAMIENTO DEL PROBLEMA

1—Consideremos el macizo limitado superiormente por una superficie cilíndrica de generatrices horizontales y perpendiculares al plano de figura: de este modo sólo tendremos que estudiar el equilibrio en el plano y no en el espacio, lo que reduce a la mitad el número de ecuaciones.

Tomemos en el plano normal a la superficie dos ejes rectangulares Ox Oy (Fig. 1ª). El primero de éstos lo tomaremos según la vertical hacia abajo. Sea AM_oB la superficie superior o libre del macizo, y SS' el piso firme sobre el cual reposa.

Sea $M(x,y)$ un punto interior de la masa. Imaginemos un elemento infinitesimal prismático de aristas horizontales y paralelas a las generatrices de la superficie libre, de longitud igual a la unidad y de sección $dx \times dy$ (Fig. 2ª)

Llamemos V la componente vertical de la presión sobre la cara horizontal superior MM_1. Sea T la componente tangencial de la tensión sobre la misma cara. Y sean H la componente tangencial de la tensión sobre MM' y T' la tangencial respectiva.

Estas presiones o tensiones se refieren a la unidad de superficie, y sobre las caras opuestas tendrán valores incrementados en las diferenciales parciales respectivas. Además, sobre el prisma actúa, en el sentido de las x positivas, el peso $\pi dxdy$ del prisma.

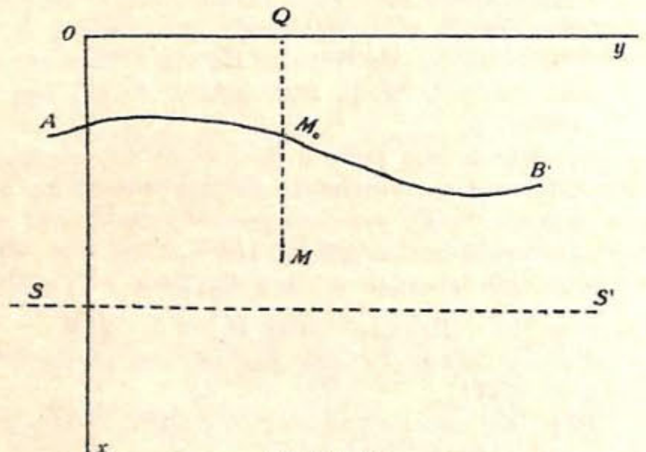

FIGURA 1ª.

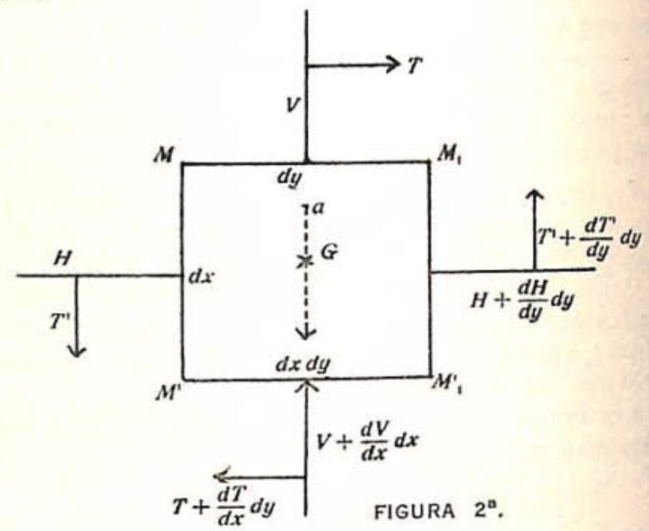

FIGURA 2ª.

Las ecuaciones de equilibrio serán: $\Sigma X = o \quad \therefore \quad \Sigma Y = o \quad \therefore \quad \Sigma(Yx - Xy) = o$ O bien:

$$\Sigma X = o \quad \therefore \quad Vdy - \left(V + \frac{dV}{dx}dx\right)dy + T'dx - \left(T' + \frac{dT'}{dy}dy\right)dx + \pi dxdy = o$$

$$\Sigma Y = o \quad \therefore \quad Hdx - \left(H + \frac{dH}{dy}dy\right)dx + Tdy - \left(T + \frac{dT}{dx}dx\right)dy = o$$

Las cuales reducidas dan: $\frac{dV}{dx} + \frac{dT'}{dy} - \pi = o \quad \therefore \quad \frac{dH}{dy} + \frac{dT}{dx} = o$

La ecuación de los momentos la simplificamos considerablemente tomándolos con relación al punto G. Tendremos:

$$\frac{1}{2}\left(T + T + \frac{dT}{dx}dx\right)dydx - \frac{1}{2}\left(T' + T' + \frac{dT'}{dy}dy\right)dxdy = o$$

Despreciando las cantidades de tercer orden, lo que es riguroso, y dividiendo por $\frac{1}{2}dxdy$

tendremos: $T - T' = o$ O bien $T = T'$

Las ecuaciones se reducen, pues, a las siguientes: $\frac{dV}{dx} + \frac{dT}{dy} - \pi = o \quad \therefore \quad \frac{dH}{dy} + \frac{dT}{dx} = o$ (1)

a las cuales llamaremos ecuaciones de Boussinesq.

Estas ecuaciones son dos y las tensiones que en ellas figuran son tres: V, H y T; nos falta, pues, una tercera ecuación para completar el sistema. Para este efecto, consideremos el equilibrio de medio prisma solamente, es decir, del prisma de base triangular $MM'M_1$ (Fig. 3ª)

Llamemos N la componente normal sobre la cara oblicua $M_1M' = ds$ y Q la componente tangencial por unidad de superficie sobre la misma cara.

Llamemos θ el ángulo que hace la cara oblicua M_1M' con la vertical y tendremos:

$$ds\ sen\ \theta = dy \qquad ds\ cos\ \theta = dx \qquad tang\ \theta = \frac{dy}{dx}.$$

Las fuerzas que actúan sobre el prisma, son:

según Ox: $Vdy \quad \therefore \quad Tdx \quad \therefore \quad -N\ sen\ \theta\ ds$

$-Q\ cos\ \theta\ ds \quad \therefore \quad +\frac{1}{2}\pi\ dxdy$

según Oy: $Hdx \quad \therefore \quad Tdy \quad \therefore \quad -N\ cos\ \theta\ ds$

$+Q\ sen\ \theta\ ds$

Por tanto: $Vdy + Tdx - Ndy - Qdx + \frac{1}{2}\pi\ dxdy = o$

$$Hdx + Tdy - Ndx + Qdy = o$$

Poniendo $dy = dx\ tang\ \theta$

y suprimiendo el término de 2º orden: $\frac{1}{2}\pi\ dxdy$

tendremos: $V\ tang\ \theta + T = N\ tang\ \theta + Q$

$$T\ tang\ \theta + H = N - Q\ tang\ \theta \qquad (2)$$

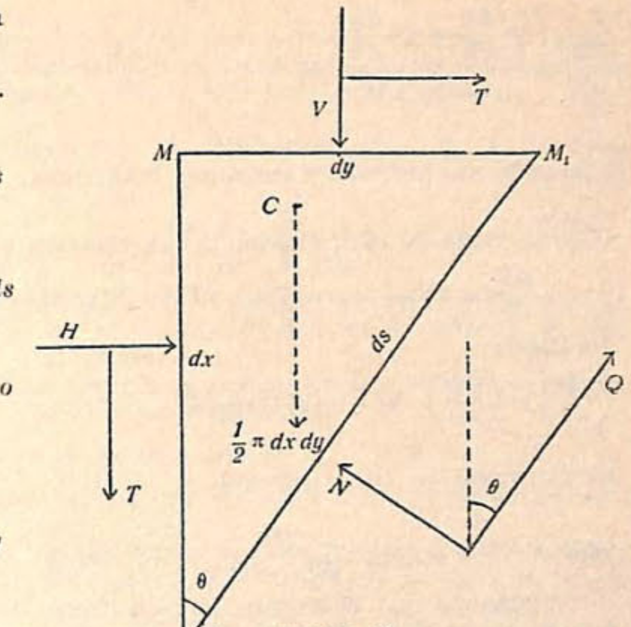

FIGURA 3ª.

La ecuación de los momentos queda satisfecha por sí misma. En efecto, tomando los momentos con relación a M_1 tendremos:

$$\frac{1}{2}Nds^2 = \frac{1}{2}Vdy^2 + \frac{1}{2}Hdx^2 + Tdxdy + \frac{1}{2}.\frac{2}{3}\pi dxdy.dy$$

Suprimiendo el término de tercer orden $\frac{1}{3}\pi\ dxdy^2$ y dividiendo por $\frac{1}{2}ds^2$ se obtiene:

$N = V\ sen^2\ \theta + H\ cos^2\ \theta + 2\ T\ sen\ \theta\ cos\ \theta$ Que es el mismo valor que se obtiene de (2) al eliminar a Q.

Despejando de (2) a N y a Q y poniendo:

$$2\ sen\ \theta\ cos\ \theta = sen\ 2\ \theta \qquad 2\ cos^2\ \theta = 1 + cos\ 2\ \theta \qquad 2\ sen^2\ \theta = 1 - cos\ 2\theta$$

se tendrá: $2N = V + H - (V - H)\ cos\ 2\theta + 2T\ sen\ 2\theta \quad \therefore \quad 2Q = (V - H)\ sen\ 2\theta + 2T\ cos\ 2\theta$ (2)'

Llamando ω el ángulo que hace la presión total $\sqrt{N^2 + Q^2}$ sobre M_1M' con la normal a dicho plano, tendremos:

$$Q = \sqrt{N^2 + Q^2}\ sen\ \omega \qquad N = \sqrt{N^2 + Q^2}\ cos\ \omega \qquad (3)$$

Por tanto:

$$tang\ \omega = \frac{(V - H)\ sen\ 2\theta + 2\ T\ cos\ 2\theta}{(V - H)\ cos\ 2\theta + 2\ T\ sen\ 2\theta} \qquad (4)$$

Además, si en (2) ponemos $Q = N\ tan\ \omega$

y dividimos miembro a miembro, tendremos: $tang(\theta + \omega) = \frac{V\ tang\ \theta + T}{T\ tang\ \theta + H}$ (4)' que es útil conocer.

Hagamos en esta última $\omega = o$ y busquemos el valor de θ' correspondiente; tendremos:

$tang\ \theta' = \frac{V\ tang\ \theta' + T}{T\ tang\ \theta' + H}$ De donde: $T\ tang^2\ \theta' - (V - H)\ tang\ \theta' - T = o$

O bien:

(a) $tang^2\ \theta' - \frac{(V - H)}{T}\ tang\ \theta' - 1 = o$ Y por tanto: $tang\ \theta' = \frac{V - H}{2T} \pm \sqrt{\frac{(V - H)^2 + 4T^2}{4T^2}}$

Así, llamando θ'_1 y θ'^2 los arcos correspondientes a las dos raíces, tendremos:

$$tang\ \theta'_1 = \frac{1}{2T}\left(V - H + \sqrt{(V - H)^2 + 4T^2}\right) \quad y \quad tang\ \theta'_2 = \frac{1}{2T}\left(V - H - \sqrt{(V - H)^2 + 4T^2}\right)$$

Tales son las direcciones de los planos sobre los cuales las presiones totales son respectivamente normales. Como (a) demuestra que $tang\ \theta'_1\ tang\ \theta'_2 = 1$ resulta que $\theta'_1 = \frac{\pi}{2} + \theta'_2$ es decir, que esas dos direcciones son respectivamente perpendiculares y corresponden a lo que se llama presiones principales.

Para hallar el máximum de ω podemos diferenciar a (4) o a (4)' con relación a θ dejando a V H y T constantes, lo que equivale a hacer girar el plano MM_1 alrededor de M_1 En seguida a igualar $\frac{d\omega}{d\theta}$ á o y despejar el valor de θ para substituírlo de nuevo en (4) ó (4)'. Se obtiene más prontamente este máximum diferenciando a Q y a N de (3) con relación a θ y haciendo $\frac{d\omega}{d\theta} = o$. Así:

$$\frac{dQ}{d\theta}=\frac{N\frac{dN}{d\theta}+Q\frac{dQ}{d\theta}}{\sqrt{N^2+Q^2}}\,sen\,\omega \quad \therefore \quad \frac{dN}{d\theta}=\frac{N\frac{dN}{d\theta}+Q\frac{dQ}{d\theta}}{\sqrt{N^2+Q^2}}\,cos\,\omega$$

En las cuales hemos hecho $\frac{d\omega}{d\theta}=o$

Elevando al cuadrado y sumando, tendremos:

$$\left(\frac{dQ}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dN}{d\theta}\right)^2=\frac{\left(N\frac{dN}{d\theta}+Q\frac{dQ}{d\theta}\right)^2}{N^2+Q^2} \qquad (b)$$

Pero se tiene de (2)′, derivando con relación a θ:

$$\frac{dN}{d\theta}=(V-H)\,sen\,2\theta+2T\,cos\,2\theta=2Q \quad \therefore \quad \frac{dQ}{d\theta}=(V-H)\,cos\,2\theta-2T\,sen\,2\theta=(V+H)-2N$$

De donde:

$$\left(\frac{dQ}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dN}{d\theta}\right)^2=(V-H)^2+4T^2 \qquad N\frac{dN}{d\theta}+Q\frac{dQ}{d\theta}=2NQ+Q(V+H)-2NQ=Q(V+H)$$

Sustituyendo en (b), tenemos:

$$(V-H)^2+4T^2=\frac{Q^2}{N^2+Q^2}(V+H)^2$$

Pero $sen^2\,\omega_{\text{máx.}}=\frac{Q^2}{N^2+Q^2}$ Por tanto:

$$sen^2\,\omega_{\text{máx.}}=\frac{(V-H)^2+4T^2}{(V+H)^2}\begin{cases} máx=+\,\omega_{\text{máx.}} \\ mín=-\,\omega_{\text{mín.}}\end{cases} \qquad (5)$$

Llamando φ el ángulo de roce límite de la materia de que está constituído el macizo, es claro que, para que el equilibrio tenga lugar, es necesario que $\omega_{\text{máx.}} \lesseqgtr \varphi$

El equilibrio mínimo se verifica, pues, para $\omega_{\text{máx.}}=\varphi$. Y se obtiene así la ecuación de Rankine:

$$(5) \qquad sen^2\,\varphi=\frac{(V-H)^2+4T^2}{(V+H)^2}$$

Las direcciones de las presiones principales se pueden escribir así:

$$tang\,\theta'_1=\frac{1}{2T}(V-H+(V+H)\,sen\,\varphi) \qquad tang\,\theta'_2=\frac{1}{2T}(V-H-(V+H)\,sen\,\varphi)$$

Fácil nos sería demostrar que las direcciones de los planos principales θ'_1 y θ'_2 son las bisectrices de los planos de ruptura, pero no entraremos en esos detalles.

* * *

INTEGRACION DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO

1ª Aproximación

Tenemos:

$$\frac{dV}{dx}+\frac{dT}{dy}-\pi=o \qquad \frac{dH}{dy}+\frac{dT}{dx}=o. \qquad (1)$$

las dos ecuaciones de equilibrio, a las cuales debemos agregar la ecuación finita de Rankine si se trata del equilibrio límite, o cualquiera otra que exprese una relación entre V H y T que deba satisfacerse según consideraciones de otro orden. Por lo pronto prescindiremos de esta última.

Para integrar las ecuaciones (1) introduciremos dos funciones desconocidas u y v de x e y capaces de satisfacer las relaciones: $V=\pi u+vT$ $T=vH$ Siendo T y H funciones de u y v las cuales vienen a reemplazar a las variables primitivas x e y.

Derivemos parcialmente las ecuaciones (a) con relación a x Así obtendremos:

$$(b) \qquad \frac{dV}{dx}=\pi\frac{du}{dx}+T\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{dT}{du}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{dT}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}\right) \qquad \frac{dT}{dx}=H\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{dH}{du}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{dH}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}\right)$$

La identificación de las ecuaciones (1) y (b) se obtiene fácilmente al hacer

(c)

$$\frac{du}{dx}=1 \therefore \frac{dv}{dx}=o \therefore v\frac{dT}{du}=-\frac{dT}{dy} \therefore v\frac{dH}{du}=-\frac{dH}{dy}$$

De donde

$$v=-\frac{\frac{dT}{dy}}{\frac{dT}{du}}=-\frac{\frac{dH}{dy}}{\frac{dH}{du}}=-\frac{du}{dy}$$

Se tendrá, pues: $\frac{du}{dx}dx=dx$ $\frac{du}{dy}dy=-vdy$ De donde $du=dx-vdy$.

Y como u debe ser independiente de x pues $\frac{dv}{dx}=o$ se obtendrá: $u=x-\int vdy$

O $u=x-\psi(y)$ siendo $\psi(y)$ una función tan arbitraria como v pues $\psi(y)=\int vdy$ ó $v=\psi'(y)$ Se tendrá, pues: (I) $V=\pi(x-\psi(y)+\psi'(y)T$ $T=\psi'(y)H$

La integración no depende, pues, sino de una sola función arbitraria $\psi(y)$ la cual depende de la forma de la superficie libre.

Si ξ y η representan las coordenadas de un punto de la superficie libre, se deberá tener en ese punto $V=o$ $T=o$ y $H=o$ Por tanto (I) da $\pi(\xi-\psi(\eta))=o$ Y la ecuación (2) $\xi=\psi(\eta)$ ó $x=\psi(y)$ deberá representar dicha superficie libre.

DISCUSION—Primeramente veremos las condiciones que se requieren para que en rigor (2) pueda representar la superficie libre, pues sólo cuando esas condiciones se cumplen es cuando las ecuaciones (I) representan las integrales del problema. Las ecuaciones (c) o, más bien, las siguientes:

$$v\frac{dT}{du}=-\frac{dT}{dy} \qquad v\frac{dH}{du}=-\frac{dH}{dy}$$

requieren para su verificación que H y T sean independientes de v; o que v sea independiente de y pues

$$\frac{dT}{dy}=\frac{dT}{du}\cdot\frac{du}{dy}+\frac{dT}{dv}\cdot\frac{dv}{dy} \qquad \frac{dH}{dy}=\frac{dH}{du}\cdot\frac{du}{dy}+\frac{dH}{dv}\cdot\frac{dv}{dy}$$

Ahora bien, podríamos suponer a H independiente de v pero como según (I) se tiene $T=vH$ por lo menos T dependerá forzosamente de v y, en consecuencia, las ecuaciones (I) sólo podrán dar solución al problema en el caso de ser $v=$ constante.

Ahora bien, la condición de ser nulas las presiones sobre la superficie libre impone la condición de que $u=o$ represente dicha superficie, es decir, que dicha superficie sea:

$x-\int vdy=o$ Pero debiendo ser $v=$ constante, se debe tener: $x-vy=o$

que representa un plano. En consecuencia, las ecuaciones (I) *no son las integrales del problema sino a condición de ser plana la superficie libre.*

En el caso de no ser plana, ellas no representarán sino una simple aproximación cuando se da a $\psi'(y)$ un valor tal que represente la inclinación de un plano que divida la superficie externa en regiones iguales encima y debajo de dicho plano.

En la práctica, la solución (I) es suficiente, pero desde el punto de vista matemático el problema es susceptible de una ecuación más exacta y de ella nos ocuparemos más adelante.

* * *

Tomemos la ecuación de Rankine:

$$(V-H)^2+4T^2-K^2(V+H)^2=o \qquad (3)$$

siendo $K=sen\,\varphi$ ($\varphi=$ ángulo de roce límite).

Las ecuaciones (I) podemos escribirlas, notando que $v=$ constante $=\alpha$ y que $\psi(y)=\alpha y$ así:

$V=\pi(x-\alpha y)+\alpha T$ $\therefore$ $T=\alpha H$ O poniendo aun para simplificar: $u=x-\alpha y$

$V=\pi u+\alpha^2 H$ $\therefore$ $T=\alpha H$ Llevando estos valores a (3)

$$(\pi u-(1-\alpha^2)H)^2+4\alpha^2H^2-K^2(\pi u+(1+\alpha^2)H)^2=o$$

O bien:

$$\pi^2u^2-2\pi(1-\alpha^2)uH+(1-\alpha^2)^2H^2+4\alpha^2H^2-K^2(\pi^2u^2+2\pi(1+\alpha^2)uH+(1+\alpha^2)^2H^2=o$$

Reduciendo sucesivamente:

$$\pi^2u^2(1-K^2)-2\pi[(1-\alpha^2)+K^2(1+\alpha^2)]uH+[(1-\alpha^2)^2+4\alpha^2-K^2(1+\alpha^2)^2]H^2=o$$

O bien:

$$(1+\alpha^2)^2(1-K^2)H^2-2\pi[(1-\alpha^2)+K^2(1+\alpha^2)]uH+\pi^2(1-K_2)u^2=o$$

Esta ecuación de segundo grado es de la forma $aH^2-bH+c=o$ y sus raíces se hacen imaginarias para $b^2<4ac$ es decir para $4\pi^2[(1-\alpha^2)+K^2(1+\alpha^2)]^2u^2<4\pi^2u^2(1+\alpha)^2(1-K^2)^2$

O suprimiendo a $4\pi^2u^2$: $[(1-\alpha^2)+K^2(1+\alpha^2)]^2<(1+\alpha^2)^2(1-K^2)^2$ O bien para

$$[(1-\alpha^2)+(1+\alpha^2)][(1-\alpha^2)+(1+\alpha^2)(2K^2-1)]<o$$

Así H se hace imaginaria para $\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}<1-2K^2$

Si pues, llamamos ω el ángulo que hace la superficie libre con el horizonte, la ecuación anterior será:

$$\frac{1-tang^2\omega}{1+tang^2\omega}<1-2\,sen^2\varphi \qquad \text{O bien:} \qquad \frac{cos^2\omega-sen^2\omega}{1}<1-2\,sen^2\varphi \quad \therefore \quad 1-2\,sen^2\omega<1-2\,sen^2\varphi$$

$$sen^2\omega>sen^2\varphi$$

El equilibrio no existirá, pues, si $\omega>\varphi$ Si $\omega<\varphi$ la componente horizontal H tendrá dos valores. Cuando $\omega=\varphi$ los dos valores de H se igualan entre sí.

Si en la ecuación de Rankine hacemos $sen\varphi=o$ se tiene $V=H$ y $T=o$; llevando estos valores a (2) se tiene $V=N=H$ y $Q=o$. Todas las presiones son, pues, principales y constantes en cada punto, cualquiera que sea la dirección del plano sobre que se ejercen. Llevando las condiciones a las integrales (I) se obtiene $\psi(y)=o$; en consecuencia la superficie libre tiene que ser horizontal. Estas conclusiones sólo son simples verificaciones, pues son conocidas las condiciones del equilibrio de los líquidos perfectos.

INTEGRACION DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN EL CASO GENERAL

Estas son:

$$(1) \qquad \frac{dV}{dx}+\frac{dT}{dy}-\pi=o \qquad \frac{dH}{dy}+\frac{dT}{dx}=o$$

Además, V T y H están ligadas por una ecuación finita, que en el caso de equilibrio límite del macizo indefinido sería la de Rankine, pero que puede ser otra cualquiera, y que para mayor generalidad la supondremos ser $F(V,H,T)=o$ (2)

Por otra parte, sobre la superficie libre AM_oB (Fig. 4ª) dada por la ecuación (3) $f(\xi,\eta)=o$ se debe tener: $V=o$ $H=o$ $T=o$ Tales son las condiciones del sistema por integrar.

Suponiendo que en el interior del macizo no haya discontinuidad y considerando además el carácter natural del problema en cuestión, estamos en el derecho de suponer que en cada punto M del macizo no puede haber sino número finito de valores para las presiones V H y T número que depende de las condiciones impuestas para el equilibrio, es decir, del grado de la ecuación (2). Cada sistema particular de valores de V H y T correspondientes a una solución de (1) y (2) se podrá representar así:

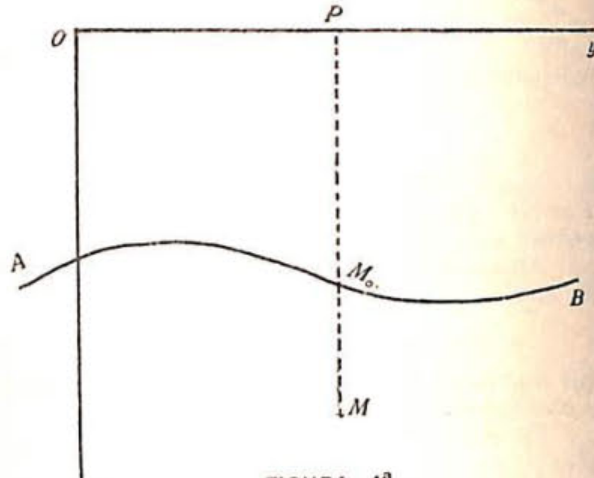

FIGURA 4ª.

$$(4) \qquad V = F_1(x,y)$$

$$T = F_2(x,y) \qquad H = F_3(x,y)$$

Si hacemos $V =$ constante, $T =$ constante, $H =$ constante, las ecuaciones (4) representarán superficies, las cuales se confundirán con (3) al hacer $x = \xi$ $y = \eta$ Es decir, que

$$F_1(\xi,\eta) = F_2(\xi,\eta) = F_3(\xi,\eta) = f(\xi,\eta) = 0$$

En otros términos: las formas de las superficies (4) se convertirán en la (3) para todos los puntos de la superficie libre.

Diferenciemos a (4) dejando constantes a V T y H es decir, a lo largo de las superficies respectivas, y tendremos:

$$\frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy = 0 \qquad \frac{dT}{dx}dx + \frac{dT}{dy}dy = 0 \qquad \frac{dH}{dx}dx + \frac{dH}{dy}dy = 0$$

De donde:

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_1 = -\frac{\frac{dV}{dy}}{\frac{dV}{dx}} = p \qquad \left(\frac{dx}{dy}\right)_2 = -\frac{\frac{dT}{dy}}{\frac{dT}{dx}} = q \qquad \left(\frac{dx}{dy}\right)_3 = -\frac{\frac{dH}{dy}}{\frac{dH}{dx}} = r$$

Las funciones p q y r representan los coeficientes angulares de las superficies sobre las cuales V T y H permanecen constantes. Notando que la superficie libre no puede ser dada sino por una ecuación tal que a un valor dado de y (eje horizontal) corresponda un solo valor de x y no pueda corresponder otro, mientras que para un valor de x puedan corresponder varios valores de y dicha ecuación (3) podrá escribirse bajo la forma $\xi = \psi(y)$ (3)′

Pongamos $u = x - \xi = x - \psi(y) = MM_0$ Es claro que p q y r serán funciones de u y de y Y podremos expresarlas en función de esas variables. Tendremos:

$$p = \phi_1(u,y) \qquad q = \phi_2(u,y) \qquad r = \phi_3(u,y)$$

Estas funciones, debiendo ser uniformes como V T y H se podrán desarrollar por la serie de Maclaurin, así:

$$p = p_0 + \left(\frac{dp}{du}\right)_0 u + K_1u^2 = p_0 + y_1u \qquad q = q_0 + \left(\frac{dq}{du}\right)_0 u + K_2u^2 = q_0 + y_2u$$

$$r = r_0 + \left(\frac{dr}{du}\right)_0 u + K_3u^2 = r_0 + y_3u$$ Siendo evidentemente $p_0 = q_0 = r_0 = \psi'(y)$

Por tanto: $p = \psi'(y) + y_1u$ $\qquad q = \psi'(y) + y_2u$ $\qquad r = \psi'(y)y_3u$

Esto supuesto, volvamos sobre las ecuaciones diferenciales. Tendremos:

$$\frac{dV}{dx} = \pi - \frac{dT}{dy} = \pi + q\frac{dT}{dx} \quad \text{pues} \quad q = -\frac{\frac{dT}{dy}}{\frac{dT}{dx}} \quad \therefore \quad \frac{dT}{dx} = -\frac{dH}{dy} = r\frac{dH}{dx} \quad \text{pues} \quad r = -\frac{\frac{dH}{dy}}{\frac{dH}{dx}}$$

Por tanto, tendremos: (1) $\quad \frac{dV}{dx} = \pi + q\frac{dT}{dx} \qquad \frac{dT}{dx} = r\frac{dH}{dx}$

Hagamos variar a x dejando a y constante desde $x_0 = \psi(y)$ hasta $x_1 = \psi(y) + \varepsilon$ siendo ε un valor de $u = x - \psi(y)$ suficientemente pequeño para que las cantidades q y r no difieran sensiblemente de sus valores q_0 y r_0 es decir, de $\psi'(y)$ En todo el intervalo $u < \varepsilon$ las ecuaciones (1)′ se harán:

(1)″ $\quad \frac{dV}{dx} = \pi + \psi'(y)\frac{dT}{dx} \qquad \frac{dT}{dx} = \psi'(y)\frac{dH}{dx}$ $\quad$ las cuales integradas darán:

$$(2)' \qquad V = \pi u + \psi'(y)T \qquad T = \psi'(y)H$$

Llevando estos valores a la ecuación finita y condicional del equilibrio, es decir, a $F(V,H,T) = 0$ se tendrá: $F(\pi u + \psi'^2H, H, \psi'H) = 0$ la cual, diferenciada totalmente da:

$$\frac{dF}{dV}\left(\pi dx - \pi\psi'dy + \psi'^2\frac{dH}{dx}dx + \psi'^2\frac{dH}{dy}dy + 2H\psi'\psi''dy\right) + \frac{dF}{dH}\left(\frac{dH}{dx}dx + \frac{dH}{dy}dy\right) +$$
$$+ \frac{dF}{dT}\left(\psi'\frac{dH}{dx}dx + \psi'\frac{dH}{dy}dy + \psi''Hdy\right) = 0$$

De donde:

$$\left(\frac{dH}{dx}dx + \frac{dH}{dy}dy\right)\left(\psi'^2\frac{dF}{dV} + \frac{dF}{dH} + \psi'\frac{dF}{dT}\right) + \frac{dF}{dV}\left(\pi(dx - \psi'dy) + 2H\psi'\psi''dy\right) + \frac{dF}{dT}H\psi''dy = 0$$

Al hacer $H =$ constante, la ecuación se reduce a:

$$(\alpha) \qquad \frac{dF}{dV}\left(\pi(dx - \psi'dy) + 2H\psi'\psi''dy\right) + \frac{dF}{dT}H\psi''dy = 0$$

Ahora bien: la ecuación que hemos diferenciado equivale a la que hemos representado por $H = F_3(x,y)$ y la relación $\frac{dx}{dy}$ sacada de ésta nos dará el valor que hemos designado por r.

Dividiendo, pues, (α) por dy y reemplazando por r el valor $\frac{dx}{dy}$ tendremos:

$$\pi\frac{dF}{dV}r - \pi\frac{dF}{dV}\psi' + 2H\frac{dF}{dV}\psi'\psi'' + \frac{dF}{dT}H\psi'' = 0 \qquad \text{De donde:} \qquad r = \psi' - \left(2\psi' + \frac{\frac{dF}{dT}}{\frac{dF}{dV}}\right)\frac{H}{\pi}\psi''$$

Si, pues, $\psi'(y)$ fuese constante, se tendría en una segunda aproximación $r = \psi'(y)$. Como debe ser según lo demostrado antes.

Conocido r hallamos fácilmente a q y á p por las ecuaciones:

$$T = \psi'(y)H \qquad V = \pi u + \psi'^2(y)H$$

En efecto, diferenciando primero a T e igualando a 0 su diferencial, se tendrá:

$\psi'\left(\frac{dH}{dx}dx + \frac{dH}{dy}dy\right) + H\psi''dy = 0$ $\quad$ De donde, reemplazando $\frac{dH}{dy}$ por $-r\frac{dH}{dx}$ se tendrá:

$\psi'\frac{dH}{dx}dx - \psi'r\frac{dH}{dx}dy + H\psi''dy = 0$ $\quad$ Dividiendo por dy y haciendo $\frac{dx}{dy} = q$ se obtiene:

$\psi'\frac{dH}{dx}q - \psi'\frac{dH}{dx}r + H\psi'' = 0$ $\quad$ De donde $\quad q = r - \frac{H}{\frac{dH}{dx}}\cdot\frac{\psi''(y)}{\psi'(y)}$

Por tanto, si $\psi'(y) =$ constante, se tendrá: $\psi'' = 0$ y $q = r$ Y como en ese caso $r = \psi'(y)$ se tendrá: $q = r = \psi'(y)$

Diferenciando a V y procediendo lo mismo, obtendremos:

$$\pi(dx - \psi'dy) + \psi'^2\left(\frac{dH}{dx}dx - r\frac{dH}{dx}dy\right) + 2\psi'\psi''Hdy = 0$$

O bien: $\quad \left(\pi + r\psi'^2\frac{dH}{dx}\right)p = \psi'\left(\pi + r\psi'\frac{dH}{dx} + 2\psi''H\right)$

Se ve igualmente que p se reduce a ψ' cuando esta cantidad es constante. Si, pues, $\psi'(y) =$ constante, la 2ª aproximación conduce al mismo resultado que la 1ª y por tanto la tercera lo mismo que la 2ª o que la 1ª, es decir, se vuelve sobre los mismos resultados que hemos obtenido antes. Si $\psi'(y)$ es variable, las aproximaciones sucesivas dependen de la ecuación finita (3), es decir, de $F(V,H,T) = 0$. Podríamos hacer una aplicación con la ecuación de Rankine, pero nos basta por ahora con haber hallado el método de integración y saber que es posible hallar las presiones en cualquier punto de un macizo pulverulento conociendo la forma de su superficie libre.

No obstante, sin especificar la forma de la función $F(V,H,T)$ podemos hallar la forma de las funciones V y T en función de H en una cualquiera de las aproximaciones sucesivas. Sean, para la aproximación del orden n:

$$V = F_1(u,y) \qquad T = F_2(u,y) \qquad H = F_3(u,y)$$

Se tiene además: $\quad p = \psi'(y) + y_1u \qquad q = \psi'(y) + y_2u \qquad r = \psi'(y) + y_3u$

Siendo y_1 y_2 y_3 funciones de u y también de y por ser funciones de $\psi'(y), \psi''(y)$

Se tendrá, pues: $\quad \frac{dV}{dx} = \pi + (\psi'(y) + y_2u)\frac{dT}{dx} \qquad \frac{dT}{dx} = (\psi'(y) + y_3u)\frac{dH}{dx}$

Podemos poner, puesto que $u = x - \psi'(y)$: $\quad \frac{dV}{dx} = \frac{dV}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{dV}{du} \qquad \frac{dT}{dx} = \frac{dT}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{dT}{du} \qquad \frac{dH}{dx} = \frac{dH}{du}$

Y por tanto: $\quad \frac{dV}{du} = \pi + \psi'(y)\frac{dT}{du} + y_2uF'_2u(u,y)$ $\quad$ Integrado parcialmente con relación a u:

$$T = \psi'(y)H + \int y_3uF'_4u(u,y)\,du \qquad V = \pi u + \psi'(y)T + \int y_2uF'_2u(u,y)\,du$$

O más simplemente: $\quad V = \pi u + \psi'(y)T + \chi_1(u,\psi',\psi'',\ldots.) \qquad T = \psi'(y)H + \chi_2(u,\psi'\psi''\ldots\ldots.)$

Las funciones $\chi_1(u\psi'\psi''\ldots.)$ $\chi_2(u,\psi'\psi''\ldots\ldots.)$ anulándose con ψ'' Si consideramos los puntos que corresponden al máximo o mínimo de $\psi'(y)$ se tendrá en dichos puntos $\psi''(y) = 0$ Y por tanto

$$V = \pi u + \psi'_{\max}(y)T \qquad T = \psi'_{\max}(y)H$$

Llevando estos valores a la ecuación de Rankine volvemos a hallar al poner $tang\,\omega_{\max} = \psi'_{\max}(y)$ que $\omega_{\max} \gtreqless \varphi$ (ángulo límite de roce).