EL CERO Y EL INFINITO, EL NUMERO **e** Y EL NUMERO **pi**

VICTOR E. CARO
Ex-Rector de la Facultad de Matemáticas e Ingeniería de la Universidad Nacional y Profesor de la misma.

EL CERO Y EL INFINITO

Dans l'histoire de la civilisation, la découverte du zero restera toujours comme une des oeuvres individuelles les plus considerables de la race humaine.

Tobías Dantzig

La introducción en Europa hacia el siglo XIII del sistema de numeración arábiga, que parece ser de origen indio, vino a libertar – a descongelar – la Aritmética, aprisionada en las mallas del defectuoso simbolismo griego y romano. Adoptado ese sistema y relegados a los prólogos de los libros y a las muestras de los relojes los guarismos romanos, la Aritmética avanzó sin tropiezos y bien pronto se enriqueció con admirables teorías y descubrimientos.

El cero (invención genial) fue como la rueda que puso en movimiento la nueva máquina, y el infinito la meta hacia la cual enderezó la proa.

Voy a dar una idea de las relaciones de estos dos símbolos, límites extremos de nuestra numeración, y a extenderme algo sobre el concepto del infinito, fundamento y raíz de la Matemática moderna.

En los textos de Algebra y Análisis tropezamos a cada paso con el infinito, que tiene su signo especial (∞) ideado por Wallis y los estudiantes de estas materias lo traen y lo llevan con el desenfado e irrespeto con que los monagos manejan las cosas sagradas.

Cuando se dice, por ejemplo, que una cantidad cualquiera dividida por cero es igual al infinito, el profano se queda suspenso, porque no comprende cómo el cero que representa la ausencia de toda cantidad y es, como si dijéramos, el símbolo de la nada, puede ser divisor de un número concreto, y cómo, dado que se pueda realizar esta operación misteriosa, el resultado es igual a algo que no tiene medida.

Y ¿cómo puede comprobarse aquello de que dos paralelas se cortan en el infinito? Y ¿cómo es posible verificar que en ciertas progresiones geométricas decrecientes la suma de un número infinito de términos es igual, exactamente idéntica, a una cantidad determinada? Y ¿cómo puede haber diversos órdenes de cantidades infinitamente pequeñas, como si dijéramos, microbios de microbios, o átomos de átomos?

Lo que pasa es que, a semejanza de los niños que manifiestan cosas diferentes con unas mismas palabras, por lo restringido de su vocabulario, las Matemáticas responden a ciertas preguntas con el símbolo del infinito, porque no pueden hacerlo de otro modo. Y esto mismo sucede con el signo *menos*, que ya indica una sustracción, ya expresa que una cantidad es negativa y ya quiere decir «antes» o «atrás».

Estos símbolos, que son el lenguaje de las Matemáticas, necesitan en cada caso una interpretación.

Veamos un ejemplo que arroja luz en estas cuestiones. Dos móviles C y J (ciclista y jinete) recorren en una misma dirección un mismo camino: conocida la distancia que los separa en un momento dado y las velocidades de cada uno, se pregunta el punto en que C que va detrás, ha de alcanzar a J. Tres casos pueden presentarse: 1.° Si la velocidad de C es mayor que la de J el Algebra nos responderá con un número m precedido del signo +. Esto significa que a una distancia m a partir de un punto dado, se verificará el encuentro. 2.° Si la velocidad de C es menor que la de J tendremos como respuesta un número n precedido del signo — Lo cual quiere decir que a una distancia n anterior al punto tomado como origen, J alcanzó a C. En este caso el signo — indica anterioridad de tiempo o de lugar. 3.° Finalmente, si las velocidades de C y J son iguales, el Algebra apelará al signo ∞ para expresar, no que los móviles han de juntarse en el infinito, sino que siempre estarán separados por la misma distancia: el encuentro no puede verificarse y el ∞ es aquí sinónimo de *jamás*.

Si resolvemos este problema por medio de la Geometría, como en el caso de Aquiles y la Tortuga de que se habla en otro lugar, (1) las velocidades de C y J estarán representadas por dos rectas, y el punto en que estas se cortan, antes o después del que se ha tomado como origen, dará la distancia buscada. Si las velocidades son iguales, las rectas que las representan serán paralelas: el paralelismo geométrico corresponde en este caso al ∞ algebraico.

Veamos otra cuestión. En nuestro cuadro del capítulo anterior (2) observamos que todo número dividido por cero está situado en la vertical que representa el infinito y todo quebrado cuyo numerador es cero queda sobre la horizontal que simboliza el cero. De modo que si llamamos m un número cualquiera tenemos estas dos igualdades: $\frac{m}{0}=\infty$ $\quad$ $\frac{0}{m}=0$ (1)

Tomando el inverso aritmético de cada una, obtendremos: $\frac{0}{m}=\frac{1}{\infty}$ $\quad$ $\frac{m}{0}=\frac{1}{0}$ (2)

La primera igualdad de (1) es igual a la 2.ª de (2), luego: $\infty=\frac{1}{0}$ y la primera de (2) es igual a la 2.ª de (1). Por tanto $\frac{1}{\infty}=0$.

---

(1) En el libro del señor Caro titulado "Los números: su historia, sus propiedades, sus mentiras y verdades", de donde se toman los capítulos que se transcriben aquí.—Nota de la Dirección.

(2) Del mismo libro citado.—N. de la D.

Vemos también que la expresión $\frac{0}{0}$ queda situada en el origen, punto único y privilegiado del cual arrancan todos los números reales: su valor puede, pues, ser cualquiera, y de ahí que se le considere como el símbolo de la indeterminación.

Consideremos estos símbolos desde otros puntosde vista.

Si dividimos un número, 10 por ejemplo, sucesivamente por uno, por un décimo, por un centésimo, etc., los respectivos cocientes que se obtienen, serán 10, 100, 1000, etc. A medida que disminuye el divisor crece el cociente y cuando aquel se acerca más y más a cero éste se hace más y más grande, y llega a tomar proporciones enormes vecinos del infinito, sin llegar jamás hasta allá.

Aquí abro un paréntesis para referir una anécdota que trae el abate Moreux en alguno de sus primorosos «Pour comprendre....» El Padre Gratry célebre filósofo francés y no mal matemático, tenía la costumbre de demostrar la existencia y poder de Dios a sus alumnos incrédulos por medio del famoso símbolo $\frac{m}{0}$. Puesto que $\frac{m}{0}=\infty$ les decía, debe tenerse que $m=\infty\times 0$ Lo cual quiere decir que el infinito multiplicado por 0 es igual a una cantidad cualquiera, en otros términos, que Dios, ejerciendo su acción sobre la nada, pudo haber creado todas las cosas.

En las cuestiones de que hablé al principio y en otras muchas del dominio matemático, *infinito* quiere decir *indefinido;* no hay cantidades infinitamente pequeñas, sino indefinidamente pequeñas, pero siempre finitas, como si dijéramos, átomos de cantidades: miradas a esta luz muchas dificultades se aclaran.

¿Cómo puede demostrarse que la suma de esta serie $1+{}^1/_2+{}^1/_4+{}^1/_3+{}^1/_{16}+\ldots.$ en que cada denominador es doble del anterior, es igual a 2 cuando el número de sumados se hace infinito? Tomemos una recta de longitud igual a 2 unidades AF. Si la dividimos por la mitad en B y luégo tomamos la mitad de BF en C y la mitad de CF en D y así sucesivamente, tendremos:

$$AB=1 \qquad BC={}^1/_2 \qquad CD={}^1/_4 \qquad DE={}^1/_8 \text{ etc....}$$

Cuando la división material se haga imposible por la pequeñez del espacio, podremos continuar operando con la imaginación. Ahora, si sumamos todas esas cantidades, lo que hacemos en realidad es ir acercándonos cada vez más al punto F, hasta lograr que la distancia que nos separa de él no pueda apreciarse por lo insignificante. En ese estado, la suma de la progresión puede considerarse prácticamente igual a 2.

Hé aquí la suma de los diez primeros términos de la progresión:

$$\begin{aligned}
&1 &&=1\\
&1+{}^1/_2 &&=1{,}5\\
&1+{}^1/_2+{}^1/_4 &&=1{,}75\\
&1+{}^1/_2+{}^1/_4+{}^1/_8 &&=1{,}875\\
&1+{}^1/_2+{}^1/_4+{}^1/_8+{}^1/_{16} &&=1{,}9375\\
&1+{}^1/_2+{}^1/_4+{}^1/_8+{}^1/_{16}+{}^1/_{32} &&=1{,}96875\\
&1+{}^1/_2+{}^1/_4+{}^1/_8+{}^1/_{16}+{}^1/_{32}+{}^1/_{64} &&=1{,}984375\\
&1+{}^1/_2+{}^1/_4+{}^1/_8+{}^1/_{16}+{}^1/_{32}+{}^1/_{64}+{}^1/_{128} &&=1{,}9921875\\
&1+{}^1/_2+{}^1/_4+{}^1/_8+{}^1/_{16}+{}^1/_{32}+{}^1/_{64}+{}^1/_{128}+{}^1/_{256} &&=1{,}99609375\\
&1+{}^1/_2+{}^1/_4+{}^1/_8+{}^1/_{16}+{}^1/_{32}+{}^1/_{64}+{}^1/_{128}+{}^1/_{256}+{}^1/_{512} &&=1{,}998046875
\end{aligned}$$

Todos los decimales, del cuarto resultado en adelante, terminan alternativamente en 875 y en 375.

El concepto de infinito en Aritmética es algo mucho más difícil de imaginar y de comprender, tanto que en esta cuestión capital, dice un autor, hasta el clarísimo espíritu de Pascal vacila.

La verdad es que la idea de número infinito envuelve algo de contradictorio, porque todo número por grande que se le suponga, es como una entidad individual, definida, concreta, es un centinela que lleva una ficha de orden y ocupa un lugar preciso, una línea infranqueable. Considerado así, ¿cómo puede ser infinito un número, es decir, cómo se le puede imaginar privado de todo límite? Si hay números infinitos, como es evidente, ¿en qué momento un número que con la imaginación hacemos crecer más y más, rompe la cuerda que lo ata a lo finito y se pierde en las nubes de la inmensidad? ¿Dónde está la frontera entre lo finito y lo infinito, línea, en cierto modo y hablando de tejas para abajo, semejante a la que separa lo temporal de lo eterno? Un número infinito es algo informe, incorpóreo, que escapa a las leyes de la Aritmética: «no puede ser par ni ser impar –dice Pascal– porque agregándole la unidad no cambia de naturaleza y, sin embargo, es un número y todo número es por o impar».

«Al hablar de dos cantidades infinitas –dice Galileo en sus *Diálogos sobre las Ciencias nuevas*– no podemos decir que son iguales ni que ésta es mayor o menor que aquella», y demuestra su tesis en un diálogo en que sorprenden todavía la novedad y fuerza de sus argumentos.

Tomando el hilo de éstos donde los dejó Galileo, dos siglos y medio más tarde, en 1883, estableció Jorge Cántor doctrina novísima en esta materia: su Aritmética del infinito, o transfinita, fue una obra que produjo una verdadera revolución en la pacífica república matemática. No he de decir, sin embargo, ni una palabra sobre ella, porque me imagino que el lector no tiene un interés especial en perder la cabeza. (1)

---

(1) Nota de la Dirección.—En el libro del señor Caro antes de entrar en las consideraciones que vienen en seguida para demostrar objetivamente la formación del módulo de los logaritmos neperianos, se trata con gran claridad, en el capítulo: "El binomio de Newton y el triángulo de Pascal" de la manera de hallar una potencia cualquiera de una suma o de una diferencia de dos cantidades sin pasar por las potencias anteriores.

EL NUMERO *e*

Ponamus autem brevitatis gratia pro numero hoc 2.71828... constanter litteram **e**...—**Euler.**

El número *e* que nos salió al paso en la fórmula del interés compuesto continuo, (1) es el mismo que sirve de base a un sistema de logaritmos llamados *neperianos*, aunque los que así se denominan, en honor de don Juan Neper, no son precisamente los que descubrió este ingenioso barón escocés.

Veamos cómo se ha logrado efectuar su cálculo. Es éste un capítulo de Algebra superior que probaré a poner al alcance de mis lectores. Tomemos la expresión $\left[1+\frac{1}{n}\right]^n$ en la cual n representa un número cualquiera que luégo haremos crecer sin medida, y desarrollémosla por medio del binomio de Newton, teniendo presente que las potencias de la unidad son todas iguales a la misma unidad, y en las de $^1/_n$ sólo el denominador se afecta. Tenemos, así:

$$\left[1+\frac{1}{n}\right]^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}\times\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}\times\frac{1}{n^3} + \ldots.$$

que puede ponerse de este modo:

$$\left[1+\frac{1}{n}\right]^n = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{n^2}\times\frac{1}{1\times 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\times\frac{1}{1\times 2\times 3} + \ldots.$$

Todo el andamiaje de *enes*, que aumenta sin cesar, va a desaparecer, como por encanto, según lo vemos en seguida.

Tomemos del tercer término este factor:

$\frac{n(n-1)}{n^2}$ que se transforma así: $\frac{n(n-1)}{n^2} = \frac{n^2-n}{n^2} = \frac{n^2}{n^2} - \frac{n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$

Al crecer n hacia el infinito, $\frac{1}{n}$ se hace cero, luego $\frac{n(n-1)}{n^2} = 1$ para $n = \infty$.

En el cuarto término tenemos:

$\frac{n(n-1)(n-2)}{n^2} = \frac{n^3-3n^2+2n}{n^3} = \frac{n^3}{n^3} - \frac{3n^2}{n^3} + \frac{2n}{n^3} = 1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}$ O sea, para $n = \infty$ se tiene: $\frac{n(n-1)(n-1)}{n^3} = 1$

Porque $\frac{3}{n}$ y $\frac{1}{n^2}$ se anulan al crecer n.

En los demás términos sucede otro tanto; de modo que el resultado final es este:

$$\left[1+\frac{1}{n}\right]^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{1\times 2\times 3\times 4} + \frac{1}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} + \ldots. \quad \text{para } n = \infty.$$

Observamos: El segundo término es igual al primero dividido por 1. El tercero es el segundo dividido por 2. El cuarto puede escribirse así: $\frac{\frac{1}{1\times 2}}{3}$ Es, pues, el tercero dividido por 3, y así de los demás. Hé aquí, de acuerdo con lo dicho, el cálculo y la suma de los 10 primeros términos, que denominaremos *A, B, C, D, E, F, G, H, I* y *J*:

A	$= 1{,}000000$
$B = {}^A/_1$	$= 1{,}000000$
$C = {}^B/_2$	$= 0{,}500000$
$D = {}^C/_3$	$= 0{,}166667$
$E = {}^D/_4$	$= 0{,}041667$
$F = {}^E/_5$	$= 0{,}008333$
$G = {}^F/_6$	$= 0{,}001389$
$H = {}^G/_7$	$= 0{,}000198$
$I = {}^H/_8$	$= 0{,}000025$
$J = {}^I/_9$	$= 0{,}000002$
Suma	$= 2{,}718281 = e$

El número *e* como el número π, puede expresarse en fracción continua de dos maneras: la segunda es de mi peculio. Hélas aquí:

$$e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{5 + \text{etc.}}}}}$$

$$e = 2 + \cfrac{1}{2 - \cfrac{2}{4 - \cfrac{3}{5 - \cfrac{4}{6 - \cfrac{5}{7\ \text{etc.}}}}}}$$

(1) En el libro del señor Caro, a que se hizo mención atrás y de donde se toman estas transcripciones. Véase la nota de la página anterior.

EL NUMERO π

La letra griega π (pi) desempeña en las Matemáticas un gran papel: es el número que expresa la medida de una circunferencia cuando el diámetro se toma por unidad. Los griegos que fueron geómetras insignes, por medios ingeniosos y especialmente por la comparación de polígonos regulares inscritos y circunscritos, encontraron que la circunferencia es a su diámetro como $^{22}/_{7}$ expresión sencillísima que da el valor de π con tres decimales. Esta fórmula se debe a Arquimedes y fue la que prevaleció durante muchos siglos. Un ingeniero militar holandés –Adriano Metius– hacia la mitad del siglo diez y seis, encontró que $\frac{355}{113}$ da el valor de π con 6 decimales. Esta expresión es fácil de recordar: basta colocar los tres primeros números impares, repetidos, así: 113355 y luégo formar un quebrado con las dos mitades.

En el siglo XVII, merced al descubrimiento del Cálculo Infinitesimal, las Matemáticas, hallando nuevos horizontes, se desarrollaron magníficamente. Lord Brounker expresó a $\pi/4$ por medio de la siguiente fracción continua, en la cual los numeradores de las fracciones integrantes son los cuadrados de los números impares:

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{}{2+\text{etc.}}}}}}$$

y James Gregory indicó la misma relación por medio de esta serie: $$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots \quad (A)$$

No sé a quién se deben estas otras formas curiosas de π:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\times2}{1\times3}+\frac{4\times4}{3\times5}+\frac{6\times6}{5\times7}+\frac{8\times8}{7\times9}+\frac{10\times10}{9\times11}\cdots$$

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{5}\left[\frac{1\times3}{2\times4}\right]+\frac{1}{7}\left[\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{1\times3\times5\times7}{2\times4\times6\times8}\right]+\ldots.$$

Pero aún no se había llegado a un resultado práctico. Para hallar el valor de π con 20 decimales exactos por medio de la serie *(A)* se requerirán, según lo demostró algún matemático, tomar quinientos millones de términos de ella, cálculo en el cual no se emplearían menos de 1.000 años. Para obviar esta *pequeña* dificultad se hicieron transformaciones en la serie de Gregory, que quedó convertida en dos series, cuya diferencia sirve para calcular a π con lujo de decimales.

Don Rafael Nieto París, infatigable investigador en cuestiones científicas y matemáticas, compuso con el fin de poder recordar a π, la siguiente estrofa, en la cual el número de letras de cada palabra corresponde a las cifras sucesivas de π:

Soy π lema y razón ingeniosa
De hombre sabio que serie preciosa
Valorando enunció magistral.
Con mi ley singular bien medido
El gran orbe por fin reducido
Fue al sistema ordinario real.

Este fruto del ingenio bogotano traducido a números, nos da el valor de la famosa letra griega que desde los tiempos de Arquimedes ha sido el rompecabezas de la humanidad, con treinta y un decimales exactos:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327 94$$

31 decimales exactos! .... Sólo diez son necesarios para la evaluación precisa, en milímetros, de la esfera terrestre, y, según el astrónomo Newcomb, no pasan de treinta los que se requieren para medir la circunferencia del universo visible con una aproximación cuyo valor escaparía al más potente microscopio. Así, pues, una cifra más no presta servicio alguno, ni lo prestará nunca. Y, sin embargo, la ilustre letra π lleva ya un séquito de 700 guarismos en columna cerrada, y sigue enriqueciéndose con nuevos refuerzos, fruto de pacientes y laboriosísimos cálculos adelantados por beneméritos investigadores, cenobitas de la Ciencia, a quienes acosa un impulso misterioso y sostiene una esperanza imposible: la de descubrir alguna ley de formación.