NOTAS MATEMATICAS

CONSECUENCIAS DE UN TEOREMA DE DESCARTES

VICTOR E. CARO

Ex-Rector de la Facultad de Matemáticas e Ingeniería de la Universidad Nacional—Bogotá—y Profesor de la misma.

En estos días he estado releyendo, con mucho contento espiritual, la *Geometría* de Descartes, cuya primera edición, publicada en Leyde como apéndice de su *Discurso sobre el método*, va a cumplir tres siglos en estos días. El ejemplar que poseo, obsequio de un noble amigo, es una reimpresión hecha con gran pulcritud y esmero tipográfico por la editorial francesa de J. Hermann, a la que tanto deben las bellas letras matemáticas. Por una excepción, la *Geometría* no fue escrita en latín, lengua que habló la ciencia hasta bien entrado el siglo XVIII, y que aún tienen por suya la astronomía y la botánica, las flores del cielo y las de la tierra. Descartes redactó su obra maestra en el francés de las grandes ejecutorias, en un estilo sobrio, conciso y elegante, no exento, por desgracia, aquí y allá, de una oscuridad intencionada, con lo cual quiso el filósofo, según propia confesión, confundir a cierta casta de pedantes que se jactaban de saberlo y entenlo todo.

El título de la obra puede hacer incurrir en error. No se trata de nuestra vieja amiga la geometría de los griegos, decana de las ciencias, sino de una nueva disciplina, hija legítima del genio de Descartes, que hoy se denomina geometría analítica, y que, por haber creado el enlace entre el número y el espacio, le abrió nuevos horizontes a la investigación matemática. La obra es pequeña, sólo tiene 90 páginas, y está dividida en tres capítulos o libros, cuyos títulos son los siguientes: 1º *De los problemas que pueden construírse con el solo auxilio de círculos y rectas.* 2º *De la naturaleza de las líneas curvas.* 3º *De la construcción de los problemas sólidos y más que sólidos.*

El tercer libro principia con una exposición sobre "la naturaleza de las ecuaciones" o, como decimos hoy, teoría de las ecuaciones; capítulo que tiene extraordinario interés porque señala el nivel exacto que había alcanzado el álgebra, poco después de la muerte de Vieta y cincuenta años antes del descubrimiento del cálculo infinitesimal. Descartes fue quien les dio a las ecuaciones la forma condensada actual, quien usó por primera vez la notación exponencial y empleó las primeras letras del alfabeto para expresar las cantidades conocidas y las últimas para las desconocidas, y finalmente, quien tuvo el valor de operar con el signo *menos*, terror de los matemáticos del siglo XVI.

Todavía, entonces, las raíces positivas se denominaban "verdaderas" y las negativas que aún no tenían carta de naturaleza, "falsas o menores que nada". Los polinomios no tenían grado sino "dimensiones"; de ahí que se hable de problemas planos, de dos dimensiones (2º grado), sólidos (3er. grado), y más que sólidos (grado superior al tercero). Acá y allá tropieza el lector con voces, hoy perdidas, que suenan deliciosamente, como el *rompu*, equivalente a nuestro quebrado (roto), reemplazado más tarde por *fraction.*

En ese libro se encuentra el famoso teorema de los coeficientes indeterminados, y el de "los signos", que da motivo a esta nota. Veamos cómo lo presenta Descartes:

"Sabed, pues, que en cada ecuación, cuantas sean las dimensiones de la cantidad desconocida (1), otras tantas pueden ser las raíces, es decir, los valores de esa cantidad; porque, por ejemplo, si se supone x igual a 2, o bien $x—2$ igual a nada; y también $x = 3$, o bien $x—3 = 0$; multiplicando estas dos ecuaciones

$$x-2=0 \quad \text{y} \quad x-3=0$$

una por la otra, se tendrá

$$x^2-5x+6=0$$

o bien,

$$x^2=5x-6$$

que es una ecuación en la cual x vale 2 y al mismo tiempo vale 3. Si de nuevo se hace

$$x-4=0$$

y se multiplica esta suma por

$$x^2-5x+6=0$$

se tendrá

$$x^3-9x^2+26x-24=0$$

que es otra ecuación en la cual x, teniendo tres dimensiones, tiene también tres valores, que son 2, 3 y 4.

(1) Incógnita.

"Pero con frecuencia sucede que algunas de estas raíces sean falsas o menores que nada; así si se supone que x designa el defecto de una cantidad que sea 5, se tiene

$$x + 5 = 0$$

que multiplicada por

$$x^3 - 9x + 26x - 24 = 0$$

produce

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

ecuación que tiene cuatro raíces, a saber, tres verdaderas, que son 2, 3 y 4, y una falsa, que es 5.

"Y se ve evidentemente que la suma de una ecuación que contiene varias raíces puede siempre ser dividida por un binomio compuesto de la cantidad desconocida menos el valor de una de las raíces verdaderas, cualquiera que sea, o más el valor de una de las falsas, por cuyo medio se disminuyen en la misma proporción sus dimensiones.

"Y recíprocamente, si la suma de una ecuación no puede ser dividida por un binomio compuesto de la cantidad desconocida + o — alguna otra cantidad, esto patentiza que la tal cantidad no es el valor de ninguna de las raíces. Así, esta ecuación $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ puede ser dividida por $x-2$ y por $x-3$ y por $x-4$ y por $x+5$, pero no por $x \pm$ alguna otra cantidad; lo que prueba que no puede tener sino las cuatro raíces 2, 3, 4 y 5.

Se conoce también por ésto cuántas raíces verdaderas y cuántas falsas puede haber en cada ecuación; es a saber, tántas verdaderas cuantas sean las veces que los signos + y — se hallen allí cambiados, y tantas falsas cuantas sean las veces que dos signos + o dos signos — se hallen seguidos. Así en la última, por razón de que después de $+x^4$ *está* $-4x^3$ *que es un cambio de + en —, y después de* $-19x^2$ *está* $+106x$ *y después de* $+106x$ *está* -120*, que representan otros dos cambios, se deduce que hay tres raíces verdaderas y una falsa, porque los dos signos — de* $4x^3$ *y* $19x^2$ *se siguen.*

Por lo mismo, si en lugar de

$$+x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

se escribe

$$+x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$$

se obtiene una ecuación en la que sólo hay una raíz verdadera que es 5, y tres falsas que son 2, 3 y 4".

Cierro el libro inmortal, dejo la pluma y tomo mi modesto lápiz de apuntes.

Hoy, teniendo en cuenta que dos signos iguales consecutivos forman una permanencia, y dos distintos una variación, el teorema de Descartes se presenta así: "El número de raíces positivas de una ecuación no puede ser superior al de sus variaciones, ni el de raíces negativas superior al de sus permanencias".

De este teorema se deduce, como consecuencia, que una ecuación en que falte un término entre dos de un mismo signo, tiene raíces complejas. (1)

En efecto, si en la ecuación

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_3 x^{m-3} \pm \dots = 0$$

reemplazamos el término que falta, así:

$$\pm 0x^{m-2}$$

y tomamos el signo + para contar las variaciones y el signo — para contar las permanencias, resulta que

$$\text{Variaciones} + \text{Permanencias} = m - 2$$

siendo m el grado de la ecuación. Luégo las raíces positivas más las negativas, serán, a lo sumo, iguales en número a $m - 2$ y como la ecuación tiene m raíces, dos de ellas, por lo menos, tienen que ser complejas. Asimismo se prueba la existencia de raíces complejas en una ecuación que carece de dos términos consecutivos, cualesquiera que sean los signos de los otros.

Las consideraciones anteriores me han hecho pensar que, en muchos casos, una simple multiplicación o el examen detenido de una ecuación, puede revelar la existencia de raíces complejas.

Veamos qué condiciones son necesarias para que, al multiplicar una ecuación por un factor lineal determinado, desaparezca del producto un término entre dos de un mismo signo. Sean, prescindiendo de las x

$$p + q + r + s \qquad (1)$$

cuatro términos positivos consecutivos de una ecuación completa. La multiplicación por el factor $x - \frac{r}{q}$ nos da:

$$p + \left[q - \frac{pr}{q} \right] + 0 + \left[s - \frac{r^2}{q} \right] \qquad (2)$$

El cero indica el término que falta. Para que los coeficientes que van entre paréntesis en (2) sean ambos positivos, debe tenerse:

$$q - \frac{pr}{q} \geqslant 0 \qquad \text{y} \qquad s - \frac{r^2}{q} \geqslant 0$$

o sea:

$$q^2 \geqslant pr \qquad \text{y} \qquad r^2 \leqslant qs \qquad (3)$$

Para que sean ambos negativos debe tenerse

$$q^2 \leqslant pr \quad \text{y} \quad r^2 \geqslant qs \qquad (4)$$

Si los signos de la ecuación (1) se presentan alternados, las desigualdades (3) y (4) no se modifican. Ahora bien, si el producto carece de un término entre dos de un mismo signo, las raíces complejas reveladas pertenecen a la ecuación, puesto que la raíz introducida con la multiplicación es racional. La simple inspección de los primeros términos de la ecuación,

(1) En lo que sigue, siguiendo a los autores modernos, llamaré compleja, y no imaginaria, una cantidad de la forma: $a + ib$.

$$x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 \;..= 0$$

nos dice que tiene raíces complejas puesto que cumple la condición (3): al multiplicarla por $x + \frac{2}{2}$ aparecen en el producto:

$$x^6 - x^5 + 0 - x^3 \ldots.$$

Si dos términos no consecutivos cumplen las condiciones de atrás, las raíces complejas serán 4.

En lo que se refiere a los tres primeros términos de una ecuación:

$$1 \pm p + q \ldots$$

las condiciones para que haya raíces complejas, se reducen, como es fácil comprobarlo ,a esta sola:

$$p^2 \leqslant q\,.$$

Veamos, finalmente, qué requisitos se requieren para descubrir las raíces complejas, cuando se hacen desaparecer dos términos del producto de $f\ (x)$ por un factor de segundo grado.

Si la ecuación

$$x^m + a_1\, x^{m-1} + a_2\, x^{m-2} + a_3\, x^{m-3} + \ldots.$$

se multiplica por

$$x^2 - a_1\, x + (a_1^2 - a_2), \qquad (5)$$

el producto carecerá de dos términos consecutivos.

Pero es preciso, para no introducir raíces complejas extrañas, que las de la ecuación (5) sean reales, o que

$$\frac{a_1^2}{4} \geqslant a_1^2 - a_2$$

de donde:

$$a_1^2 \geqslant 4a_1^2 - 4a_2$$

o sea,

$$-3a_1^2 \geqslant -4a^2$$

o, finalmente,

$$3a_1^2 \leqslant 4a_2$$

Si los coeficientes a_1 y a_2 cumplen esta condición, dos raíces de la ecuación serán complejas.

Dejo en manos del paciente lector estas insinuaciones matemáticas, y vuelvo con renovado encanto a enfrascarme en la lectura de mi viejo Descartes.

El Mochuelo, octubre 12, 1936.