*Memorias del Seminario en Conmemoración de los 400 Años del Nacimiento de René Descartes.*
Santafé de Bogotá: 1997, págs. 11—24. ISBN 958-9205-26-7

# DESCARTES, INVESTIGADOR MATEMÁTICO AFORTUNADO

**Alberto Campos**

*Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia.*
*Calle 45, carrera 30, Santafé de Bogotá, D. C., Colombia*

Escriben Smith & Latham, en la introducción a su traducción de la *Geometría* de Descartes [4, v] : "Si un matemático fuera preguntado acerca de obras que han marcado una época, en su ciencia, podría hesitar en su selección de una obra representativa del siglo XIX, del siglo XVIII ; pero, respecto al siglo XVI, o, al siglo XVII, o, respecto a los clásicos griegos tendría con seguridad, puntos de vista muy definidos. Incluiría ciertamente las obras de Euclides, Arquímedes y Apolonio entre los productos de la civilización griega, mientras que entre quienes contribuyeron al gran renacimiento de la matemática en el siglo XVII incluiría la *Geometría*, de Descartes, y los *Principia*, de Newton".

La obra de Descartes es un valor seguro y constituye el pedestal para la celebridad de su autor. Lo cual no deja de ser curioso , enigmático, dice Molland. [9]

Es como si el renombre de Hilbert tuviera como única base los *Fundamentos de la Geometría. Quizá podría hacerse un paralelo en cuanto a la influencia de estas dos obras maestras en la historia de la geometría*.

Es de observar que, por admirable que haya sido la síntesis cartesiana entre álgebra y geometría, entre conocimientos matemáticos y conocimientos interdisciplinarios, entre los conocimientos de quienes le antecedieron y de quienes fueron sus coetáneos, sin embargo, puede aseverarse, ponderados cuidadosamente los méritos, que muy pocos matemáticos deben tanto a tan poco, donde el calificativo se aplica a la cantidad y no a la calidad de la obra, desde luego. Quizá se pueda comparar bajo este aspecto a Descartes con Pascal o con Galois. Otros matemáticos generalmente escribieron muchas páginas antes de que la posteridad les haya acordado la perennidad por unas cuantas.

No hay un problema que se llame el problema de Descartes. No hay un teorema que lleve su nombre. Apenas hay la regla de los signos, con atribución a Descartes.

Ha de haber algo radicalmente nuevo en la *Geometría*, para explicar su gran influencia posterior, escribe Molland [9].

Es interesante hacer algunas consideraciones valorativas a guisa de explicación.

El avance, en cualquier rama de la matemática, desde la iniciación hasta la etapa investigativa, es bastante lento, salvo raras excepciones :

- Dar ejemplos.
- Dar contraejemplos.
- Hacer ejercicios.
- Resolver problemas.
- Crear métodos para resolver problemas.
- Poner problemas.

Fundamentalmente, Descartes muestra cómo servirse del álgebra para resolver problemas de geometría.

Para tener una idea de los logros matemáticos cartesianos, pueden alistarse las menciones que hace Bourbaki [1]. Pueden distinguirse dos tipos, las compartidas por el matemático y filósofo con sus contemporáneos y las peculiares de Descartes.

Descartes, como Leibniz, es un filósofo a la par que un matemático; epítetos que Bourbaki no atribuye en ningún otro caso.

Descartes, como Bombelli un poco antes, reduce toda medida de magnitud a una de longitud.

Descartes, como Viète, contribuye al perfeccionamiento de la escritura algebraica.

Para Descartes, 1637, como para Girard, 1629, el número de raíces de una ecuación es igual al grado de la ecuación. Hecho establecido de manera definitiva por Gauss, 200 años después del nacimiento de Descartes.

Descartes, como Fermat, da un paso adelante respecto de los griegos en el empleo de sistemas coordenados.

Descartes, como Fermat, fusiona el álgebra y la geometría, no solamente con buenas intenciones sino planteando y resolviendo problemas, que hacen tal fusión irreversible.

Descartes, como Roberval y Torricelli, introduce en el campo de las nociones utilizables corrientemente por los matemáticos para resolver problemas, las de desplazamiento infinitesimal, composición de movimientos, y, centro instantáneo de rotación.

Descartes, como sus contemporáneos, gasta cierta osadía con lo infinitesimal, en el problema de la rectificación de curvas : asimilar la curva a un polígono con infinidad de lados, asimilar un arco "infinitamente pequeño" a un segmento de recta "infinitamente pequeño", asimilar en lo "infinitamente pequeño" el movimiento a una rotación alrededor de un punto.

Descartes, como Pascal, tuvo inquietudes atinentes a la fundamentación de la matemática, pero desdeñables ; en el caso de Descartes, según la crítica de Leibniz, por demasiado subjetivas, del terreno lógico pasan al de la psicología. No obstante, a Descartes se reconoce un presentimiento de la epistemología del siglo XX.

Actitudes más peculiares de Descartes en la historia de la geometría son las siguientes. [1]

Algebrización de la geometría. Hasta entonces había carencia de curvas. Había unas cuantas, surgidas primordialmente de la indagación en los tres problemas griegos, tenían nombre propio y propiedades debidas a su mismo origen. En tiempos de Descartes, la cicloide era una novedad y el establecer sus propiedades era ocasión para reto entre los científicos más distinguidos. Descartes, al explotar la idea de traducir problemas de geometría al lenguaje algebraico, transmuta la inopia en una incontenible exhuberancia de curvas cuyo estudio es literalmente inagotable.

Una segunda idea personal de Descartes (bien subrayado por Bourbaki entre otros) es la de concebir la unidad de la matemática como una disciplina cuyos componentes son relaciones y proporciones.

Conviene recordar la carta de Descartes a la Princesa Elisabeth, citada con frecuencia : "En la solución de un problema geométrico pongo cuidado , tanto como sea posible, en usar como líneas de referencia, paralelas o rectas en ángulo recto ; y no echo mano de otros teoremas que de aquellos que aseguran que los lados de triángulos semejantes son proporcionales y de aquel según el cual en un triángulo rectángulo el cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los lados. No vacilo en introducir varias cantidades desconocidas, con el fin de reducir la cuestión a tales términos que todo dependa de este par de teoremas" (Smith & Latham, [4, nota 18]).

Descartes toma la matemática donde la habían dejado los griegos : "... los antiguos conocían ciertas matemáticas muy diferentes de las matemáticas vulgares de nuestro tiempo" escribe en la Regla IV para la dirección del espíritu. Y al terminar la segunda Regla escribe : "Trato solamente de hacer ver que los que buscan el camino recto de la verdad, no deben ocuparse de lo que no ofrezca una certeza igual a la de las demostraciones de la aritmética y de la geometría".

Lo que Descartes hace es introducir el álgebra, "una especie de aritmética que consiste en operar sobre un número lo que los antiguos operaban sobre las figuras" ( Regla IV). Y un poco más adelante : "Método y no otra cosa parece lo que se designa con el extraño nombre de álgebra...por este medio se les puede dar esa claridad y facilidad suprema que creemos deben hallarse en las verdaderas matemáticas".

Descartes comenzó a componer *las Reglas para la dirección del espíritu* [5] ( a partir de 1619, obra dejada inconclusa en 1629) como una especie de manual de buenas intenciones, reflexiones acerca de lo que debería ser en la práctica el método (soñado el 10 de noviembre de 1619); en realidad, en geometría, el método fue puesto a prueba solo en 1632 al resolver un problema, transmitido por Papo de Alejandría, pero ya conocido por Euclides y Apolonio.

Haber logrado resolver el problema fue muy importante para la autoestima de Descartes y para apreciar en concreto el álgebra como método para resolver problemas enunciados en términos geométricos [3], [4], [7], [8], [11].

Dados en el plano, *n* segmentos, encontrar un punto a partir del cual puedan trazarse *n* segmentos relacionados con los dados por ciertas condiciones de ángulos y por cierta razón entre el producto de algunos segmentos y el producto de otros segmentos.

Existen conjuntos de puntos que satisfacen a las condiciones puestas.

Una pregunta es: ¿cuál es la curva conformada por tales conjuntos ?

Este es uno de esos problemas donde se trabaja incómodamente con el álgebra de figuras de los griegos. Por eso, tal vez, el problema había sido considerado, pero no resuelto por Euclides y por Apolonio.

El aporte genial de René Descartes es haberse dado cuenta de que la nueva herramienta, el álgebra de los árabes enriquecida hasta Viète, era el método apropiado para plantear el problema y para resolverlo.

Si se escribe un planteo con letras, como lo hace Descartes, es posible precisar el primer enunciado.

Dados por ejemplo, 4 segmentos *AB, AD, EF, GH* (Figura 1) determinar un punto *C* tal que al trazar los segmentos *CB, CD, CF, CH*, se formen los ángulos dados *CBA, CDA, CEF, CHG* y se cumpla la igualdad $CB \cdot CD = rCF \cdot CH$, donde *r* es una razón dada.

Descartes toma uno de los segmentos dados, AB, designado con *x*, y uno de los segmentos por trazar, *BC*, designado con *y*, como segmentos principales, a los cuales va a referir los otros segmentos, para lo cual prolonga estos hasta encontrar a AB, a BC, o a su prolongación. (Figura 2).

Dado que *BC* corta a *AB* y a AD bajo ángulos dados, el triángulo ABR resulta conocido, lo cual le permite establecer razones de comparación y relaciones de unas líneas con otras ; puesto que cada segmento es representable analíticamente mediante una expresión de la fórmula $ay + bx + c$, Descartes obtiene (figura 2)

$$\begin{aligned}
&CB = y \,, \\
&CD = ay + bx \,, \\
&CB = y \,, \\
&CF = a_1 y + b_1 x + c_1 \,, \\
&CH = a_2 y + b_2 x + c_2 \,;
\end{aligned}$$

al aplicar la segunda condición sobre la proporcionalidad del producto de segmentos, y efectuar las operaciones, llega finalmente a una ecuación de segundo grado: así ha mostrado que, en general, el problema de Papo para cuatro líneas requiere resolver una ecuación de segundo grado para conocer la curva que contiene a todos los puntos *C* que verifican las condiciones. Como el problema está planteado en general, las expresiones resultan complejas ; desde luego, queda claro que el álgebra permite alcanzar solución para el problema.

Descartes escribe las fórmulas resolutivas, con anotación de las debidas precauciones que permitan asegurar la validez de la solución. Discute el caso en que el conjunto de los puntos C es una circunferencia, una elipse, o una parábola (Figura 3) y muestra luego, apoyándose en Euclides o en Apolonio, que la solución algebraica coincide con la geométrica. Lo cual es cumplir el reto a cabalidad de resolver el problema de Papo para cuatro líneas.

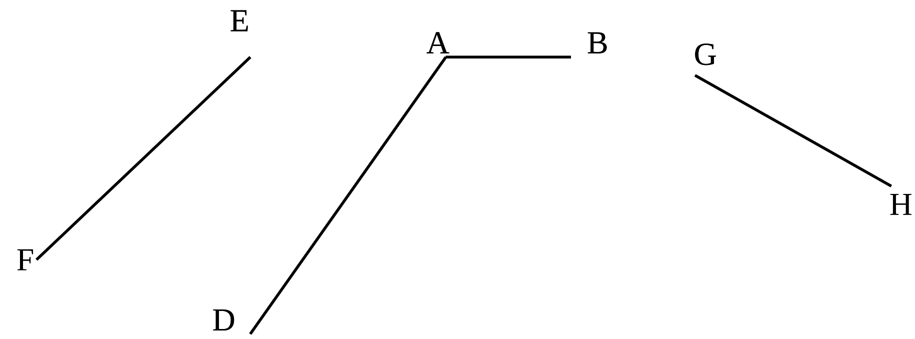

FIGURA 1

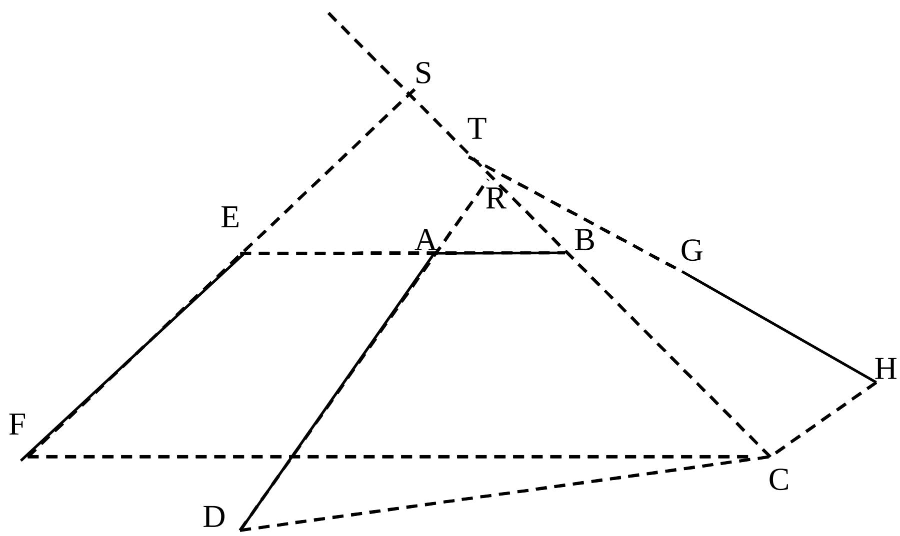

FIGURA 2

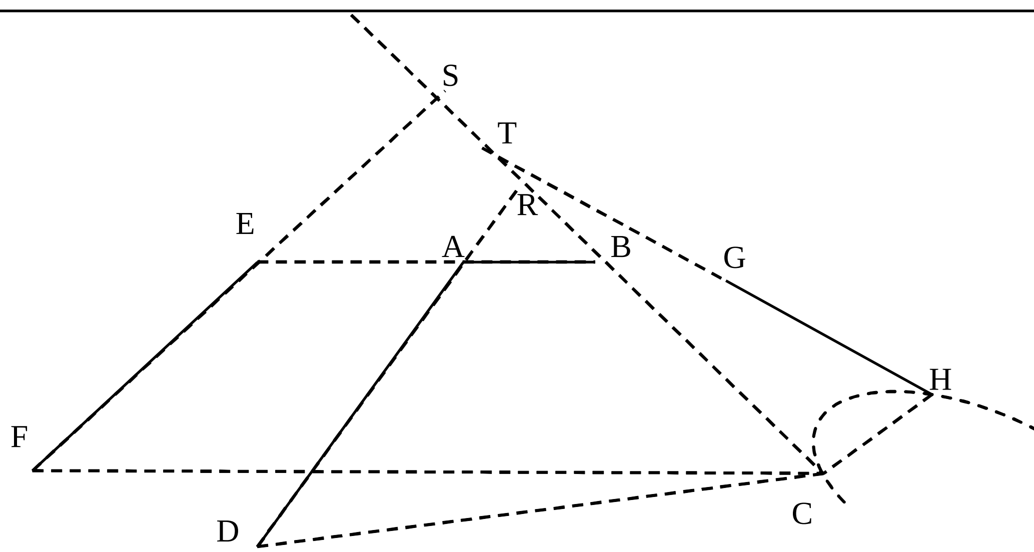

FIGURA 3

Dados los segmentos $AB$, $EF$, $GH$, donde $AB$ dista 4 unidades de $EF$, y $EF$ dista 3 unidades de $GH$, determinar el punto $C$ tal que $\angle CAB$ igual a un ángulo recto, $\angle CFE$ igual a la mitad de un ángulo recto, $\angle CHG$ igual a un sexto de ángulo recto, y $(CF)^2 = (CA)(CH)$.

Para resolver este caso, considérese el punto C tal que CG = y. Al aplicar la condición de los ángulos se obtiene

$$CH = 2y,$$

$$CF = \sqrt{2}(y+3).$$

Por lo tanto, al aplicar la condición sobre la igualdad del producto de los segmentos hallados, $\left[\sqrt{2}(y+3)\right]^2 = (y+7)(2y)$, se llega a una ecuación de primer grado cuya solución es $y = 9$.

Un caso particular del problema de Papo para 5 segmentos es estudiado en detalle por Descartes. Dados los segmentos $AB$, $DE$, $FG$, $GA$, $IH$, de tal modo que $GA$ sea perpendicular a los otros 4, determinar un punto $C$ tal que $CM$ está entre $AB$ y $DE$, y corta a $EA$ en $M$ . Entonces $CD \cdot CF \cdot CH = CB \cdot CM \cdot AI$.

Sean: $CB = y$, $CM = x$, $AI = AE = EG = a$. Entonces los segmentos dados dados $AB$, $DE$, $FG$, $HI$ son equidistantes, y

$$CD = a - y$$
$$CF = 2a - y$$
$$CH = a + y$$

Al aplicar la condición sobre los productos de segmentos, $(a-y)(2a-y)(a+y) = yxa$ se obtiene $y^3 - 2ay^2 - a2y + 2a^3 = axy$, ecuación de la curva a la que pertenecen todos los puntos $C$ que son soluciones del problema. (Figura 5).

Después de la solución algebraica viene la construcción geométrica, es decir, una cadena de consideraciones a la manera de Euclides o de Apolonio, que conducen, una vez más, a la curva determinada por consideraciones puramente algebraicas.

Para 5 o menos segmentos, la ecuación resultante no irá más allá del segundo grado en $x$, aunque $y$ sea de mayor grado, porque para cada $y$ (Descartes, como Fermat, trabaja en realidad no con 2 sino con una coordenada) el problema se reduce a resolver ecuaciones de segundo grado. [11]

El estudio que hizo Descartes del problema de Papo, tuvo el mérito de mostrar al álgebra como instrumento para resolver un problema planteado en términos de geometría.

Descartes creyó que el problema de Papo sería mucho más importante : que todas las curvas geométricas ( en el sentido de Descartes, ver más adelante) tendrían que ver con aquel.

Fue de mucho más peso el estudio que hizo Descartes para la determinación de la tangente a una curva. Comienza por suponer un círculo que relaciona el punto de tangencia en cuestión con el punto de intersección con un eje coordenado de la normal a la curva en el punto de tangencia.

La idea luminosa es la de considerar que el círculo no corta a la curva sino que la toca (búsqueda de una raíz doble) ; lo cual conducirá a la idea de determinar la tangente como límite de rectas secantes. La idea cartesiana era puramente algebraica y ocasiona cálculos prolijos. Fermat se valía de un procedimiento distinto y que resultó más cercano del algoritmo definitivo para la determinación de la tangente. Pero el impulso dado por Descartes fue decisivo en cuanto provocó trabajos de los geómetras holandeses Hudde y Slusse (1650), y de van Schooten. Barrow, el maestro de Newton, con base en tales trabajos, da una explicación definitiva unos diez años más tarde. [6]

Al problema de Papo está ligado el de resolver ecuaciones de grado cualquiera, a lo cual Descartes parece dedicarse con verdadera fascinación y acierto. [3]

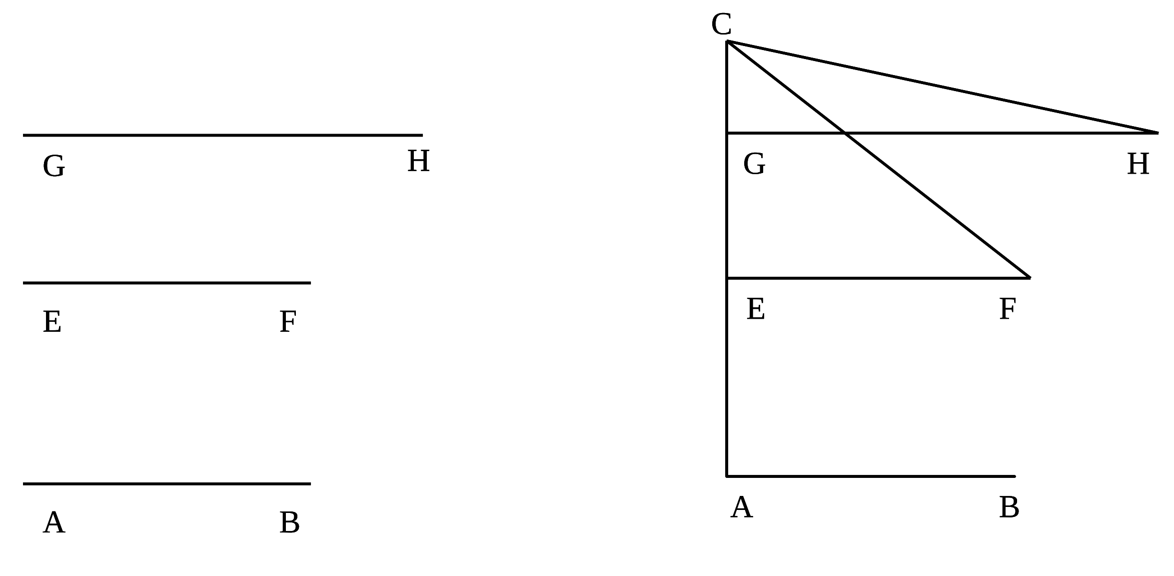


FIGURA 4

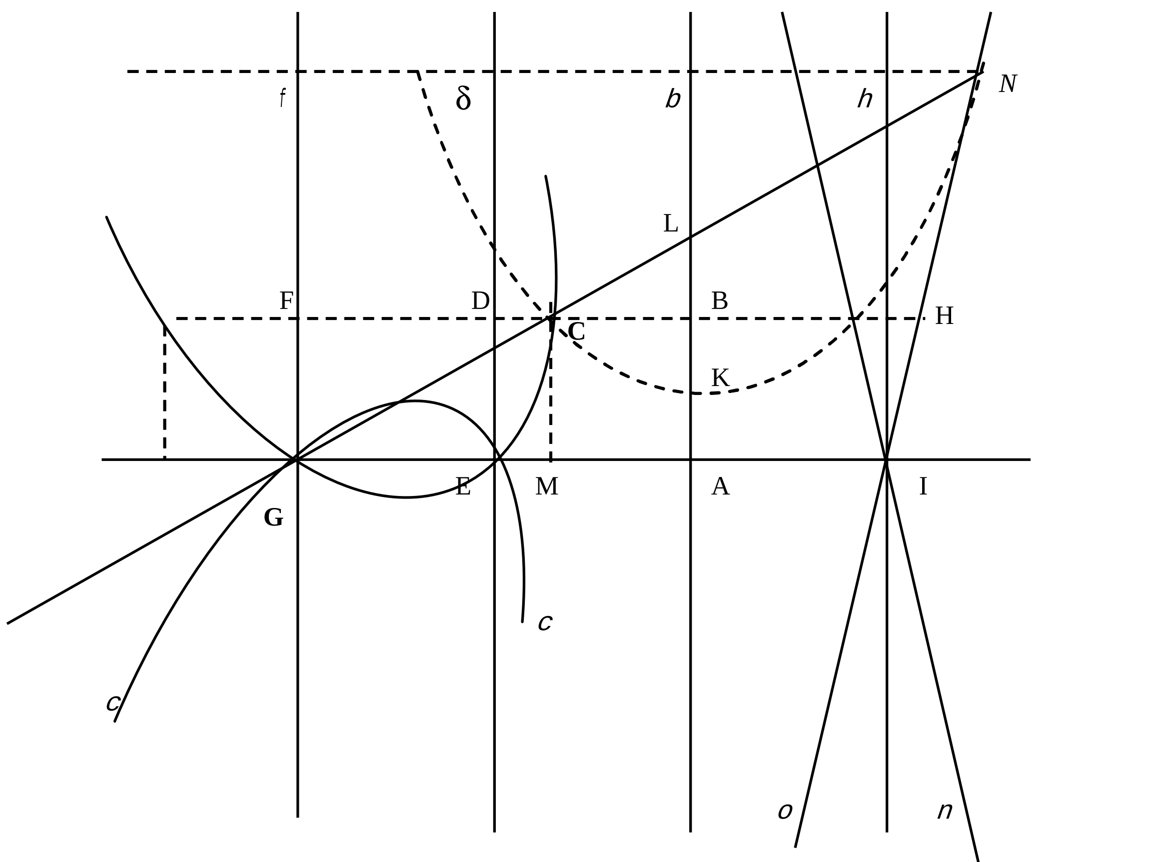


FIGURA 5

Baste recordar algunos subtítulos del tercer libro de la *Geometría* para darse cuenta de dónde provienen diversos temas de cualquier introducción actual al primer curso de álgebra :

·Sobre el número de raíces de una ecuación.

·Sobre las raíces negativas (falsas).

·Sobre la reducción del grado de una ecuación.

·Cómo puede examinarse si una cantidad dada es el valor de una raíz.

·Cuántas raíces positivas y negativas pueden darse en una ecuación.

·Cómo convertir las raíces positivas en negativas y viceversa.

·Cómo pueden hacerse mayores o menores las raíces de una ecuación sin conocerlas.

·Al aumentarse las raíces positivas disminuyen las negativas y a la inversa.

·Cómo puede suprimirse el segundo término en una ecuación.

·Cómo lograr que las raíces negativas pasen a ser positivas sin que suceda lo inverso.

·Cómo lograr una ecuación de coeficientes racionales.

·Raíces reales o imaginarias.

Que un problema sea resoluble con regla y compás se traduce por el hecho de que las raíces de una ecuación puedan hallarse mediante extracción de únicamente raíces cuadradas. Descartes estudió ecuaciones de tercero y cuarto grados, susceptibles de representar problemas solubles con regla y compás. En particular, fue capaz de transformar ecuaciones de cuarto grado en de tercero. Vuillemin [11, 12, 13]se tomó el trabajo de explicitar la concordancia de los cálculos cartesianos con los que se desprenden de la actual teoría de ecuaciones.

Descartes iluminó sendas para la investigación posterior a punta de intuiciones geniales.

Se valía de la intuición y de la deducción, pero subordinaba implacablemente la deducción a la intuición. [10]

No es de extrañarse de que al lado de claros aciertos haya claras equivocaciones. He aquí algunas :

Clasificación de las curvas por géneros, guiado por aquello de problemas planos descritos por ecuaciones de grados 1, o, 2 ; y problemas sólidos descritos por ecuaciones de grados 3 o 4. [1]

Al terminar el libro II de la *Geometría* quiere indicar cómo extender al espacio los procedimientos exitosos en el plano, pero falla la intuición del problema al afirmar que para construir normales a las curvas alabeadas basta saberlo hacer respecto de las proyecciones ortogonales sobre dos planos.

Un rasgo cartesiano negativo en la historia de la geometría, es el de la distinción entre curvas geométricas y mecánicas : "... todos los puntos de las curvas geométricas, es a saber, de las susceptibles de medida precisa y exacta, tienen necesariamente alguna relación con todos los puntos de una recta, que puede ser expresada mediante una sola ecuación". Así, pues, las curvas geométricas resultan dadas por una ecuación distintiva que especifica una propiedad. Descartes entendía por ecuación lo que se denomina actualmente ecuación polinómica, lo cual es claro a lo largo de la *Geometría*. Así, pues, las curvas trascendentes no son curvas geométricas para Descartes : por ejemplo, la espiral logarítmica no lo es.

Para tener éxito, decía Maquiavelo, son requeridos talento y fortuna. Descartes los tuvo ambos. Tenía un talento muy bien cultivado. No es el discípulo de ningún maestro [7] y se propone crear su propio método para progresar en cuanto se pueda saber.

Pero es igualmente, un ser humano con mucha suerte. Supo encauzar, tratándose de la filosofía, el descontento con su aprendizaje, su enseñanza e incluso su utilización como regla de vida. Construyó, completamente a su manera, una filosofía, desde la base, con método y problemas.

Pero, igualmente en matemática vive el momento en que su acción puede ser determinante. En el aire había diversas ideas contrapuestas, lo que generaba confusión. Descartes intuye cuáles son las verdaderamente básicas y muestra cómo usar de ellas. Más decididamente que Fermat, quiere llegar al público, aunque no desea meterse en pleitos.

Es un investigador matemático afortunado en cuanto su obra es somera. Prácticamente se reduce a las 120 páginas de la *Geometría*. Hay alguna correspondencia atinente. En la *Geometría* expone con algún detalle, no con todo detalle ; en algunos casos, porque no existían aún los algoritmos apropiados.

Descartes compone con gran diligencia sus obras filosóficas ; no puede decirse literalmente lo mismo de su obra matemática, a pesar de las grandes luces que proyectó sobre el desarrollo de la geometría.

Molland [9] menciona a Allard, quien en un escrito dedicó tres páginas a "la pereza de Descartes respecto a la matemática".

En la *Geometría* hay pasajes reveladores : "Trataré de dar la demostración en pocas palabras porque me fastidia escribir mucho" (Smith & Latham [4, 26-27]).

"No es mi propósito escribir un gran tratado. Intento más bien decir mucho en pocas palabras" (Smith & Latham [4, 240]).

En otra oportunidad sugiere que procede como quien se encarga del plan general de una obra y deja los detalles a los ayudantes.

"Renuncio a la geometría" escribe alguna vez como excusa para no completar unos cálculos.

Se puede suscribir el juicio de Molland [9] acerca de la *Geometría* : "Hay frecuentes obscuridades y lagunas de razonamiento ; diversos temas que habían interesado a Descartes en otras ocasiones de su vida son lanzados allí sin escrúpulos en cuanto a la unidad de la obra". Es una lástima que todas las 120 páginas no hayan sido escritas con el mismo fervor explicativo que las concernientes a la teoría de ecuaciones.

Si se nota cierta displicencia de Descartes respecto de los cálculos algebraicos que comportaba su visión de la geometría mediante el álgebra, no es de extrañar que algo análogo suceda en su correspondencia.

Florimond de Beaune, digno estudioso de la *Geometría*, escribe al maestro para someterle un problema que fue interpretado por Descartes como problema inverso del de la determinación de tangentes ; si el de tangentes tiene que ver con diferenciación, el de Beaune tendrá que ver con integración. Descartes, en su respuesta hace comentarios muy pertinentes ; pero escribe que ha trabajado en el problema, siempre sobre borradores que no ha conservado ; por lo cual le envía solo la idea general que se ha hecho del problema sin los cálculos esclarecedores que, seguramente, esperaba de Beaune. [11]

Descartes tiene gusto por la reflexión profunda y está convencido de que la parsimoniosa solución de un problema matemático puede extenderse en un método general para buscar la verdad en cualquier disciplina. Participa a otros su personal degustación de la investigación. Pero francamente no disfruta el placer de llevar un problema hasta sus últimas consecuencias. El "intúyalo primero, luego demuéstrelo" de Polya es para Descartes : Una vez intuido, lo demás viene por añadidura.

Todo eso hizo Descartes.

No lo hizo tan bien como hubiera podido hacerlo.

Fue quien mejor concretó unas cuantas ideas que estaban en el aire de la época, como era requerido por las necesidades investigativas en ese momento de la historia. [3]

Ahí Descartes tuvo más suerte que Fermat, por ejemplo.

Pudo entusiasmar a sus pares con las posibilidades de la confluencia entre álgebra y geometría. [8]

En principio, cada vez que un investigador posterior logra poner en ecuaciones una cuestión geométrica, o sencillamente quien enseña los elementos de la matemática mediante un cálculo cualquiera, podría recordar con una especie de gratitud, al escudriñador del siglo XVII que más acertó a vislumbrar el camino, es a saber, a Descartes.

**Bibliografía**

[**1**] BOURBAKI, Nicolas. *Éléments d'histoire des mathématiques*. 1974. Paris. Hermann. 379 págs.

[**2**] CAHIERS DE ROYAUMONT. *Philosophie. Numéro II. Descartes*. 1957. Paris. Les Editions de Minuit.

[**3**] CAMPOS, Alberto. *Algunos temas en la Géométrie de René Descartes*. XIII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Universidad Nacional. Bogotá. 2-6 XII 1996. 60 págs.

[**4**] DESCARTES, René. *The Geometry of René Descartes*. Translated from the French and Latin by David Eugene SMITH and Marcia LATHAM. With a facsimile of the first edition (1637). 1954. Dover

Publications. xiii + 244 págs.

[**5**] DESCARTES, René. *Discurso del método. Meditaciones metafísicas.. Reglas para la dirección del espíritu. Principios de filosofía.* Estudio introductorio, análisis de las obras y notas al texto por Francisco LARROYO. 1974. México. Porrúa. xxiv + 166págs.

[**6**] EDWARDS, Charles Henry. *The Historical Development of the Calculus*. (1979). Second Printing. 1982. New York. Springer-Verlag. xii + 351 pp.

[**7**] ITARD, Jean. *Essais d'histoire des mathématiques*. 1984. Paris. Librairie Scientifique et Technique. 386 pp.

[**8**] RASHED, Roschdi (éd). *Mathématiques et philosophie de l'Antiquité à l'âge classique*.1991. Paris. Editions du CNRS. xii + 315 pp.

[**9**] MOLLAND, A. G. *Shifting the Foundations : Descartes's Transformation of Ancient Geometry.* 1976. Historia Mathematica. Volume III. 21-49

[**10**] OLIVO, Gilles. *L'évidence en règle : Descartes, Husserl et la question de la mathesis universalis*. págs. 189-221. Les Etudes philosophiques. Numéros 1 et 2. 1996.

[**11**] VUILLEMIN, Jules. *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*. (1960). Deuxième édition. 1987. Paris. PUF. 188 págs.

[**12**] VUILLEMIN, Jules. *Sur la différence et l'identité des méthodes de la métaphysique et des mathématiques chez Descartes et Leibniz et sur la conception classique des principes de causalité et de correspondence*. págs. 267-302. Archiv für Geschichte der Philosophie. Band 43. Heft 1. Berlin 1961.

[**13**] VUILLEMIN, Jules. *La philosophie de l'algèbre*. Tome Premier. 1962. Paris. PUF. 582 págs. (págs. 5-28. Méthode analytique et méthode synthétique chez Descartes).